U.93 **Shapiros Ungleichungen.** Man betrachte die zyklische Summe

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2},$$

wobei alle Zähler nichtnegativ und alle Nenner positiv seien. Es ist

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \frac{n}{2}$$

für $n = 3$, 4 und 5 zu zeigen.

U.93 *Beweis:* Nach CAUCHY-SCHWARZ gilt mit $a_i \equiv x_{i+1} + x_{i+2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$, den elementaren symmetrischen Funktionen σ_1 und σ_2 (vgl. (U.50)) sowie $s_2 \equiv \sum x_i^2$:

$$\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n}\right)(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n) \geq \sigma_1^2,$$

$$\Longrightarrow \quad f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \frac{\sigma_1^2}{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n}.$$

Es ist also $\sum x_i a_i$ nach oben durch σ_1^2 abzuschätzen.
$n = 3$ (A. M. NESBITT, 1903): Hier ist $\sum x_i a_i = 2\sigma_2 \leq \frac{2}{3}\sigma_1^2$ (nach (U.62)), somit $f_3 \geq \frac{3}{2}$.
$n = 4$: $\sum x_i a_i = \sigma_2 + (x_1 x_3 + x_2 x_4)$; aus $(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 \geq 0$ folgt $x_1 x_3 + x_2 x_4 \leq \frac{s_2}{2} = \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \sigma_2$, $\sum x_i a_i \leq \frac{1}{2}\sigma_1^2$, schließlich $f_4 \geq 2 = \frac{4}{2}$.
$n = 5$: $\sum x_i a_i = \sigma_2$; außerdem nach CAUCHY-SCHWARZ $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_1 \leq s_2$, $x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_1 + x_5 x_2 \leq s_2$, also $\sigma_2 \leq 2s_2 = 2\sigma_1^2 - 4\sigma_2$ bzw. $\sum x_i a_i = \sigma_2 \leq \frac{2}{5}\sigma_1^2$, schließlich $f_5 \geq \frac{5}{2}$. $\square$