U.94 Für $a, b, c, d > 0$ gilt

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

(*Ungarn, 1964*)

U.94 *Beweis:* AM-GM bis zum Abwinken:

$$\begin{aligned}\frac{abc+abd+acd+bcd}{4} &\leq \frac{1}{2}\left(ab\,\frac{c+d}{2}+cd\,\frac{a+b}{2}\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{c+d}{2}+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\frac{a+b}{2}\right]\\ &= \left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\right)\cdot\frac{a+b+c+d}{4}\\ &\leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\frac{a+b+c+d}{4} = \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der RMS-Ungleichung gilt somit:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.\ \square$$