U.1 Elementares Rechnen mit Ungleichungen

Seit frühester Kindheit sind uns Vergleiche wie „größer“ oder „kleiner“ zwischen Zahlen vertraut – lange bevor uns das Rechnen mit Zahlen beigebracht wurde. Daß Ungleichungen aber ebenso wie Gleichungen miteinander verknüpft werden können, hat man uns vielleicht nicht so deutlich gesagt. Wir holen dieses hier kurzerhand nach.

U.1.1 Positive und negative Zahlen

Jede reelle Zahl $a \neq 0$ ist entweder *positiv* oder *negativ*. Die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen wird deshalb auch in drei Untermengen aufgeteilt: in die Menge $\mathbb{R}^+$ (oder auch $\mathbb{R}_{>0}$) aller positiven Zahlen, die Menge $\mathbb{R}^-$ ($\mathbb{R}_{<0}$) aller negativen Zahlen und die Einermenge $\{0\}$. Wie sich diese Unterteilung bei arithmetischen Operationen verhält, darüber geben folgende, einfach nachvollziehbare Regeln Auskunft:

$$\text{a)}\ a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+ \implies (a+b) \in \mathbb{R}^+, \tag{U.1}$$

$$\text{b)}\ a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+ \implies ab \in \mathbb{R}^+, \tag{U.2}$$

$$\text{c)}\ a \in \mathbb{R}^- \iff (-a) \in \mathbb{R}^+, \tag{U.3}$$

$$\text{d)}\ a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^- \implies ab \in \mathbb{R}^-, \tag{U.4}$$

$$\text{e)}\ a \in \mathbb{R}^+ \iff \frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+. \tag{U.5}$$

Eine reelle Zahl $a \notin \mathbb{R}^-$ wird *nichtnegativ* genannt, die Menge aller nichtnegativen Zahlen gewöhnlich mit $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnet, also $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Für die Summe mehrerer Zahlen aus $\mathbb{R}_0^+$ ist noch folgende Regel erwähnenswert:

f) Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ nichtnegative Zahlen, dann ist die Summe $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ebenfalls nichtnegativ. Dabei gilt $s = 0$ genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. (U.6)

Wir sagen, daß eine Zahl a genau dann *größer* (bzw. *kleiner*) als eine Zahl b ist, wenn $a - b$ positiv (bzw. negativ) ist:

$$a > b \iff (a-b) \in \mathbb{R}^+,$$

$$a < b \iff (a-b) \in \mathbb{R}^-.$$

Da $a - b$ und $b - a$ zueinander entgegengesetzt sind, bedeutet das nach obiger Regel c), daß $a > b$ dasselbe ist wie $b < a$. Aus der Aufteilung $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$ folgt das

Trichotomie-Gesetz. Für zwei beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist genau eine der drei Relationen $a > b$, $a = b$, $a < b$ wahr.

Im Fall, daß $a > b$ (bzw. $a < b$) *nicht* gilt, schreiben wir $a \leq b$ (bzw. $a \geq b$). Ungleichungen mit einem $<$ oder $>$ (bzw. $\leq$ oder $\geq$) nennen wir *streng* (bzw. *schwach*). Mit der schwachen Ungleichung $a \geq b$ ist daher auch $(a - b) \in \mathbb{R}_0^+$ gemeint.

U.1.2 Rechenregeln

Wie gewohnt formulieren wir die grundlegenden Rechenregeln als Aufgaben, da sie alle bewiesen werden können.