

Die bisher betrachteten einfachen Mittel \mathcal{A}_n , \mathcal{G}_n und \mathcal{H}_n erweisen sich als Spezialfälle von Ausdrücken, die sich aus Summen der Form $a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r$ für $r = 1, 0^\dagger, -1$ ableiten lassen. Läßt man nunmehr jedes beliebige $r \in \mathbb{R}$ zu, gelangt man zunächst zu folgender Definition:

Potenz-Mittel[†]. Es sei (a_1, a_2, \dots, a_n) eine endliche Folge positiver reeller Zahlen sowie $r \in \mathbb{R}$. Das *Potenz-Mittel* vom Grad r ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^r(a_1, a_2, \dots, a_n) &\equiv \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} && (r \neq 0, |r| < \infty), \\ &\equiv (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} && (r = 0), \\ &\equiv \min(a_1, a_2, \dots, a_n) && (r = -\infty), \\ &\equiv \max(a_1, a_2, \dots, a_n) && (r = +\infty). \end{aligned} \quad (\text{U.27})$$

Wie man sieht, ergibt sich für $r = 1$ bzw. $r = -1$ gerade das arithmetische Mittel $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n^1$ bzw. das harmonische Mittel $\mathcal{H}_n = \mathcal{M}_n^{-1}$.

[†]Der Fall $r = 0$ ist nicht so offensichtlich, siehe Aufgabe **U.18**.

^{†‡}Damit ist natürlich nicht *Viagra*[®] gemeint ;-)

Um zunächst mit der Schreibweise vertraut zu werden, sei folgende Aufgabe empfohlen: