Bevor wir zur letzten Ungleichung in diesem Abschnitt kommen, müssen wir noch klären, was unter der Eigenschaft *Konvexität* bzw. *Konkavität* einer Funktion verstanden wird.

Konvexität (Konkavität). Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Intervall (a, b) genau dann *konvex*, wenn die Ungleichung

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) \tag{U.41}$$

für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ und jedes $\theta \in (0, 1)$ erfüllt ist. Gilt in (U.41) sogar das Kleiner-Zeichen für $x_1 \neq x_2$, heißt die Funktion f *streng konvex*. Im Fall, daß $-f$ konvex ist, heißt f *konkav* bzw. (im Fall des Kleiner-Zeichens) *streng konkav*.

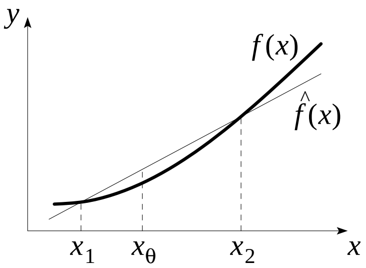

Bild U.1 Konvexität einer Funktion

Jedes $x_\theta \in (x_1, x_2)$ läßt sich dabei als $x_\theta \equiv x_1 + (1-\theta)(x_2 - x_1) = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$ mit irgendeinem $\theta \in (0, 1)$ schreiben. In Bild U.1 hat die Gerade durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ die Gleichung

$$\hat{f}(x) \equiv f(x_1) + \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right](x - x_1),$$

so daß der Funktionswert an der Stelle x_θ gleich $\hat{f}(x_\theta) = \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)$ ist. Die Bedingung (U.41) läßt sich somit kurz als $f(x_\theta) \leq \hat{f}(x_\theta)$ schreiben. Geometrisch bedeutet Konvexität (Konkavität) also, daß der Graph der Funktion $f(x)$ niemals oberhalb (unterhalb) irgendeiner Sekante liegt, die zwei auf dem Graphen liegende Punkte verbindet.