U.3.2 Symmetrie und Homogenität

Vielleicht ist es uns schon an den bisherigen Aufgaben aufgefallen: Viele Ungleichungen beinhalten symmetrische Ausdrücke in den betreffenden Variablen. Einen Ausdruck nennen wir *symmetrisch* in seinen Variablen, wenn jede Permutation der Veränderlichen den Ausdruck unverändert läßt. Dagegen heißt ein Ausdruck *zyklisch (vertauschbar)*, wenn er lediglich invariant gegenüber einer „Vorwärts"-Vertauschung der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) \to \cdots \to (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

oder auch „rückwärts":

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) \to \cdots \to (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$$

ist, also nicht „wild" permutiert wird, sondern die Reihenfolge eingehalten wird. Betrachten wir beispielsweise die symmetrische Summe

$$Q_1(a, b, c) \equiv \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b},$$

so können wir uns leicht überzeugen, daß alle $3! = 6$ Permutationen dasselbe Ergebnis

$$Q_1(a, b, c) = Q_1(b, c, a) = Q_1(c, a, b) = Q_1(a, c, b) = Q_1(b, a, c) = Q_1(c, b, a)$$

liefern. Andererseits hat das zyklische Polynom

$$Q_2(x, y, z) \equiv x^2y + y^2z + z^2x$$

nur folgende drei Vertauschungmöglichkeiten: $Q_2(x, y, z) = Q_2(y, z, x) = Q_2(z, x, y)$.

Symmetrische Ungleichungen (also Ungleichungen, die ausschließlich symmetrische Ausdrücke enthalten) gestatten nun eine Annahme, die die Allgemeinheit keineswegs einschränkt, nämlich die, daß die Variablen beliebig *sortiert* sind:

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \qquad \text{oder etwa} \qquad x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n.$$

Als Beispiel möge die Ungleichung

$$(a-b)^2(a+b-c) + (c-a)^2(c+a-b) + (b-c)^2(b+c-a) \geq 0$$

dienen. O. B. d. A. können wir, da es sich um eine symmetrische Ungleichung handelt, zum Beweis $a \geq b \geq c$ annehmen. Daraus folgt nun der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
& a + b \geq 2\,c \implies (a+b-2\,c)(a-b) \geq 0 \\
& \implies [(a-c)+(b-c)] \cdot [(a-c)-(b-c)] = (a-c)^2 - (b-c)^2 \geq 0 \\
& \implies (a-b)^2(a+b-c) + [(a-c)^2 - (b-c)^2](a-b) + c[(a-c)^2 + (b-c)^2] \geq 0 \\
& \implies (a-b)^2(a+b-c) + (a-c)^2(a-b+c) - (b-c)^2(a-b-c) \geq 0 \\
& \implies (a-b)^2(a+b-c) + (c-a)^2(c+a-b) + (b-c)^2(b+c-a) \geq 0. \ \square
\end{aligned}$$