Als Beispiel einer *homogenen* Ungleichung sei

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \tag{U.46}$$

angeführt. Ersetzen wir in ihr die Variablen a, b durch ta, tb mit einem beliebigen $t \in \mathbb{R}^+$, so geht die Ungleichung über in

$$\frac{ta+tb}{2} - \sqrt{tatb} - \frac{(\sqrt{ta}-\sqrt{tb})^2}{\sqrt{\frac{ta}{tb}}+\sqrt{\frac{tb}{ta}}} = t\left[\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}}\right] \geq 0.$$

Beide Ungleichungen unterscheiden sich lediglich durch den positiven Faktor t, d. h., sie sind äquivalent. Allgemein wird eine Ungleichung $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ *homogen* (in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$) genannt, wenn sie äquivalent zu $Q(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \geq 0$ für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}^+$ ist, insbesondere falls

$$Q(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^r Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{U.47}$$

mit einem bestimmten $r \in \mathbb{R}$ gilt. Die offensichtliche Freiheit bei der Wahl der Variablen t läßt sich nun so ausnutzen, daß wir *genau eine* zusätzliche Bedingung stellen können, um die Variablen zu *normalisieren*. Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten:

- einer Variablen wird ein fester Wert ungleich null zugewiesen, wodurch die Anzahl der Variablen sofort um eins erniedrigt wird (z. B. $x_n = 1$), oder
- der Summe, dem Produkt oder einer sonstigen Größe wird ein fester Wert ungleich null zugewiesen (z. B. $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ oder $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$).

Die dadurch entstehende Ungleichung ist dann natürlich nicht mehr homogen. Setzen wir also in (U.46) beispielsweise $b \equiv 1$ und schreiben für $a \equiv x^2$, so erhalten wir:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}} \iff \frac{x^2+1}{2} - x - \frac{(x-1)^2}{x+\frac{1}{x}} \geq 0$$

$$\iff \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{x(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0 \iff \frac{(x-1)^2}{2} \cdot \frac{x^2+1-2\,x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^4}{2\,(x^2+1)} \geq 0,$$

was sicher richtig ist.