U.3.5 Ordnung muß sein: Tschebyscheff & Co.

Erinnern wir uns an die TSCHEBYSCHEFFsche Ungleichung (s. Aufgabe U.24): Um sie anwenden zu können, benötigen wir nur zwei gleichsinnig geordnete Zahlenfolgen. Diese begegnen uns aber öfter als man meinen sollte. Nehmen wir z. B. ein Dreieck mit seinen Seitenlängen a, b und c. Oft ist es o. B. d. A. möglich, die Seitenlängen der Größe nach zu sortieren: $a \geq b \geq c$. Nun wissen wir aber aus der Geometrie, daß infolgedessen auch einige andere Ungleichungen erfüllt sind:

1. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ (der größten Seite liegt stets er größte Winkel gegenüber),
2. $\sin\alpha \geq \sin\beta \geq \sin\gamma$ (in spitzwinkligen Dreiecken, da $\sin x$ dort monoton wächst),
3. $\cos\gamma \geq \cos\beta \geq \cos\alpha$ (da $\cos x$ in $(0, \pi)$ monoton fallend ist),
4. $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$ (da $\frac{1}{x}$ monoton fallend ist),
5. $h_c \geq h_b \geq h_a$ (da $\frac{\Delta}{x}$ monoton fallend ist).

Versetzen wir uns jetzt einmal in die Rolle eines Aufgabenstellers und nehmen $a \geq b \geq c$ und $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Mit Hilfe der TSCHEBYSCHEFFschen Ungleichung entsteht daraus

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

Diese etwas seltsam aussehende Ungleichung ohne TSCHEBYSCHEFF zu zeigen, dürfte einem einigermaßen schwer fallen.

Halten wir abschließend noch fest, daß als Hinweis auf die erfolgreiche Anwendung dieser wichtigen Standard-Ungleichung das Auftreten von gemischten Produkten auf der „Größer-Seite“ (wie z. B. $a\alpha + b\beta + c\gamma$) und der Faktor $\frac{1}{n}$ auf der „Kleiner-Seite“ der vorgelegten Ungleichung dienen kann.