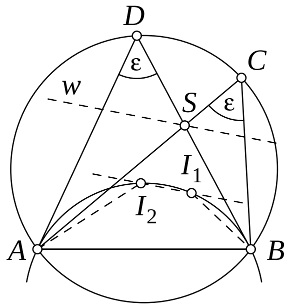
V.27 $ABCD$ sei ein Sehnenviereck. Die Gerade durch die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABC und ABD verläuft dann stets parallel zu der Winkelhalbierenden zwischen den Diagonalen AC und BD.

V.27 *Beweis:* (Bild) Wir bezeichnen die Winkel $\measuredangle CAB \equiv \alpha$, $\measuredangle CBA \equiv \beta$, $\measuredangle DAB \equiv \gamma$ und $\measuredangle DBA \equiv \delta$; der Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ sei I_1, der von $\triangle ABD$ entsprechend I_2. Damit ist

$$\measuredangle I_1AB = \frac{\alpha}{2}, \quad \measuredangle I_1BA = \frac{\beta}{2}, \quad \measuredangle I_2AB = \frac{\gamma}{2}, \quad \measuredangle I_2BA = \frac{\delta}{2}.$$



Nach dem Peripheriewinkelsatz ist $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB \equiv \varepsilon$ und demnach

$$\begin{aligned} \measuredangle AI_1B = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} &= 90^\circ + \frac{\varepsilon}{2} \\ = 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2} &= \measuredangle AI_2B \end{aligned} \qquad \text{(V.105)}$$

(vgl. Aufgabe D.9); somit ist auch ABI_1I_2 ein Sehnenviereck. Wir berechnen nun den Winkel η zwischen den Geraden I_1I_2 und AB (vgl. Aufgabe V.4):

$$\eta \equiv |180^\circ - \measuredangle I_1I_2A - \measuredangle I_2AB| = \left|180^\circ - (\measuredangle I_1I_2B + \measuredangle AI_2B) - \frac{\gamma}{2}\right| = \frac{|\beta-\gamma|}{2}.$$

Dabei wurde (V.105) und $\measuredangle I_1I_2B = \measuredangle I_1AB = \frac{1}{2}\alpha$ (Peripheriewinkel über BI_1) benutzt. Andererseits ist der Winkel zwischen w und SB $\frac{1}{2}(\alpha+\delta)$ (d. i. die Hälfte des Außenwinkels $\measuredangle BSC$ im $\triangle ABS$), der Winkel zwischen w und der Geraden AB schließlich

$$\left|180^\circ - \left(180^\circ - \alpha - \delta + \frac{\alpha+\delta}{2}\right) - \alpha\right| = \frac{|\delta-\alpha|}{2} = \eta.$$

Die beiden Geraden w und I_1I_2 verlaufen daher parallel. $\square$