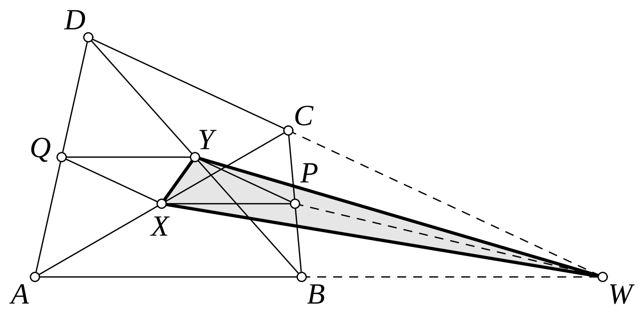
V.3 In einem Viereck $ABCD$ treffen sich die (verlängerten) gegenüberliegenden Seiten AB und CD im Punkt W. Die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD seien X bzw. Y. Dann gilt

$$[XWY] = \frac{1}{4}[ABCD].$$

(*Kanada, 1978*)

V.3 *Beweis:* (Bild) Hier besteht die Lösungsidee darin, das Dreieck XWY in Teildreiecke zu zerlegen, um deren Flächeninhalte besser in Relation zum Viereck $ABCD$ zu bringen als dies mit XWY als Ganzes möglich ist. Dazu zeichnen wir die Mittelpunkte P und Q der Seiten BC bzw. DA in unsere Figur mit ein. Dann ist $XPYQ$ das Varignon-Parallelogramm des überschlagenen Vierecks $ACBD$. Außerdem ziehen wir noch die Verlängerungen BW und CW sowie PW. Die Strecke XP, die die Mittelpunkte der Seiten BC und CA des Dreiecks ABC verbindet, ist parallel zur Seite AB und halbiert damit die „andere“ Diagonale CW des Vierecks $CXWP$. Nach der Umkehrung des Satzes aus Aufgabe V.2 gilt somit



$$[PXW] = [XPC] = \frac{1}{4}[ABC]. \tag{V.101}$$

Analog folgt

$$[PWY] = [YBP] = \frac{1}{4}[BCD]. \tag{V.102}$$

Damit fehlt am Flächeninhalt $[XWY]$ nur noch $[PYX]$, welcher jedoch bereits in Aufgabe V.1 ermittelt wurde:

$$\begin{aligned}[PYX] &= \frac{1}{2}[XPYQ] = \frac{1}{4}[ACBD] \\ &= \frac{1}{4}[BDA] + \frac{1}{4}[ACB] \\ &= \frac{1}{4}[DAB] - \frac{1}{4}[ABC].\end{aligned} \tag{V.103}$$

Addieren wir (V.103), (V.101) und (V.102), so erhalten wir

$$\begin{aligned}[XWY] &= [PYX] + [PXW] + [PWY] \\ &= \frac{1}{4}[DAB] - \frac{1}{4}[ABC] + \frac{1}{4}[ABC] + \frac{1}{4}[BCD] \\ &= \frac{1}{4}[DAB] + \frac{1}{4}[BCD] = \frac{1}{4}[ABCD]. \quad \square\end{aligned}$$