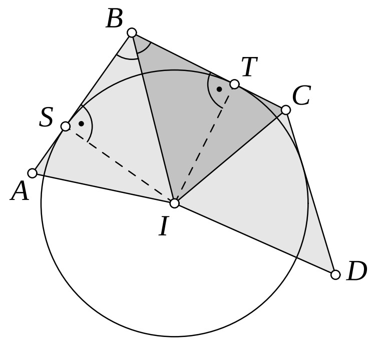
W.10 Gegeben sei ein n-Eck, welches einen Inkreis besitzt und dessen Seiten dieselbe Länge haben. Beweise, daß das n-Eck regelmäßig ist, wenn n ungerade ist.
(*41. Mathematik-Olympiade 2001/02, Klasse 10, Stufe 2*)

W.10 Der nachfolgende Beweis, der im Gegensatz zur offiziellen Lösung gänzlich ohne Gleichungen auskommt, stammt von Benjamin Franz.



Beweis: (Bild) Wir nehmen uns zwei benachbarte Seiten, ziehen von jedem der Anfangs- und Endpunkte der beiden Seiten eine Strecke zum Mittelpunkt I des Inkreises und erhalten so zwei Dreiecke ABI bzw. CBI. Beide sind nach SWS kongruent, weil sie eine gemeinsame Seite BI haben, außerdem ihre Seiten AB bzw. BC, die zum n-Eck gehören, gleich sind und I auf der Winkelhalbierenden von $\measuredangle ABC$ liegt, also $\measuredangle ABI = \measuredangle CBI$ gilt. (Letzteres folgt aus $\triangle BSI \cong \triangle BTI$.) Ebenso zeigen wir $\triangle CBI \cong \triangle CDI$. Es folgt also, daß alle benachbarten Paare dieser Dreiecke kongruent sind. Mithin hat jeder *zweite* Eckpunkt denselben Abstand zu I: $AI = CI = \ldots$. Ist n gerade, gelangen wir nach einem Umlauf wieder bei A an, können also nicht auf gleiche Länge aller Strecken schließen; wohl aber bei n ungerade, wo wir beim zweiten Umlauf gerade noch die restlichen Strecken „erwischen“. Der Mittelpunkt des Inkreises ist damit im letzten Fall auch Mittelpunkt des Umkreises, woraus folgt, daß alle Zentriwinkel untereinander gleich sind und das n-Eck demzufolge regelmäßig ist. $\square$