$\boxed{\text{W.12}}$ a) In einem beliebigen Dreieck seien h_a, h_b und h_c die Höhen und r der Inkreisradius. Man beweise, daß stets $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ gilt.
b) Gibt es ein Dreieck, für welches $h_a + h_b + h_c = 9r$ gilt?
(*38. Mathematik-Olympiade 1998/99, Klasse 10, Stufe 3*)

W.12 a) *Beweis:* Aus Aufgabe **D.63** wissen wir, daß der Flächeninhalt $\varDelta$ eines beliebigen Dreiecks gleich dem Produkt aus Inkreisradius r und halbem Umfang $s \equiv \frac{1}{2}(a+b+c)$ des Dreiecks ist. Somit gilt

$$ah_a = 2\varDelta = (a+b+c)r \qquad \text{bzw.} \qquad h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) r$$

und entsprechend auch

$$h_b = \left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b}\right) r, \qquad h_c = \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right) r.$$

Eine Addition dieser drei Gleichungen ergibt

$$h_a + h_b + h_c = \left[3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\right] r. \tag{W.104}$$

Nun gilt für je zwei positive Zahlen x, y stets die Ungleichung $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. (Davon überzeugen wir uns leicht, wenn wir zu $(x-y)^2 \geq 0$ auf beiden Seiten $2xy$ addieren und anschließend durch xy dividieren, s. Abschnitt U.2.1.) Aus (W.124) folgt daher die Behauptung

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r. \ \square \tag{W.105}$$

b) In einem *gleichseitigen* Dreieck gilt in (W.125) das Gleichheitszeichen. — *Beweis:* Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen zugleich Seitenhalbierende und Winkelhalbierende. Ihr Abschnitt vom gemeinsamen Schnittpunkt, der zugleich Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt ist, bis zur zugehörigen Seite ist somit gleich r und beträgt nach Aufgabe **D.10** ein Drittel der Höhen $h_a = h_b = h_c$. Daher gilt hier $h_a + h_b + h_c = 9r$. $\square$