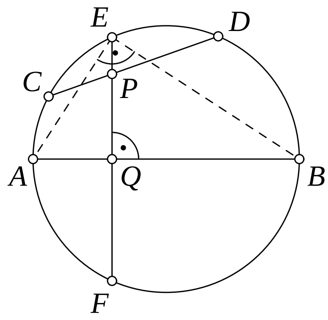
W.13 Auf einem Halbkreis über einer gegebenen Strecke AB als Durchmesser seien zwei Punkte C und D gelegen. Ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke CD, und Q sei der Fußpunkt des von P auf AB gefällten Lotes. Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets folgende Gleichung gilt:

$$AQ \cdot QB - CP \cdot PD = PQ^2$$

(*38. Mathematik-Olympiade 1998/99, Klasse 10, Stufe 3*)

W.13 *Beweis:* (Bild) Das „verdächtige" Produkt $CP \cdot PD$ erinnert uns natürlich sofort an den Sehnensatz (vgl. Aufgabe K.11), nur brauchen wir, um ihn anwenden zu können, eine zweite Sehne, die ebenfalls durch P geht. Dazu klappen wir den gegebenen Halbkreis um, so daß ein Vollkreis entsteht. Dieser schneidet nun aus der Geraden $g(P, Q)$ unsere zweite, gesuchte Sehne EF heraus. Somit folgt



$$CP \cdot PD = EP \cdot PF. \tag{W.106}$$

Da Q der Lotfußpunkt von P bzw. E auf dem Durchmesser AB ist, halbiert Q die Sehne EF, also $EQ = QF$. Damit wird

$$EP \cdot PF = (EQ - PQ) \cdot (PQ + EQ) = EQ^2 - PQ^2. \tag{W.107}$$

Weiterhin ist nach dem Thales-Satz $\triangle AEB$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei E, für welches wir den Höhensatz hinschreiben können:

$$EQ^2 = AQ \cdot QB. \tag{W.108}$$

Aus (W.106), (W.107) und (W.108) folgt $CP \cdot PD = AQ \cdot QB - PQ^2$. $\square$