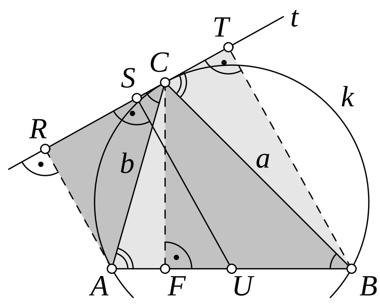
W.16 Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen und ist Δ der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte auf die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert

$$2\Delta \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

(*32. Mathematik-Olympiade 1992/93, Klasse 9/10, Stufe 4*)

W.16 *Beweis:* (Bild) Wir betrachten im $\triangle ABC$ zunächst eines dieser Lote, beispielsweise den Lotfußpunkt S, der vom Mittelpunkt U von AB auf die an C gelegte Tangente t gefällt wird. Weiterhin seien R, T die Lotfußpunkte von A, B auf t sowie F der Fußpunkt des von C auf $g(A, B)$ gefällten Lotes. Die beiden Dreiecke CFA und BTC sind ähnlich, da sie einerseits rechtwinklig sind, und andererseits die Winkel $\measuredangle BAC$ und $\measuredangle BCT$ Peripherie- bzw. Sehnen-Tangentenwinkel über der Sehne CB des Umkreises k und damit gleich groß sind. Daher gilt mit $CF \equiv h_c$ die Proportion:



$$\frac{BT}{BC} = \frac{CF}{CA} \qquad \text{oder} \qquad BT = h_c \frac{a}{b}.$$

Analog folgt aus $\triangle ARC \sim \triangle CFB$ für das Lot $AR = h_c(b/a)$. Nun ist $ABTR$ offenbar ein Trapez, in dem US gerade die Mittellinie ist (wegen $AU = UB$). Daraus folgt mit $\Delta = \frac{1}{2}ch_c$:

$$US = \frac{1}{2}(AR + BT) = \frac{h_c}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab} = \Delta \cdot \frac{a^2 + b^2}{abc}. \tag{W.111}$$

Für die beiden anderen Entfernungen erhalten wir ganz analoge Ausdrücke, in denen a, b, c jeweils zyklisch vertauschbar sind, also $\Delta(b^2 + c^2)/(bca)$ und $\Delta(c^2 + a^2)/(cab)$, so daß als Summe der Ausdruck $2\Delta(a^2 + b^2 + c^2)/(abc)$, wie behauptet, folgt. $\square$

Bemerkung: Für $\measuredangle BAC = 90°$ geht F in A und T in C über, und (W.111) folgt wie oben direkt aus $\triangle ARC \sim \triangle CAB$.