W.18 Einer Halbkugel mit dem Radius R werde ein Tetraeder $ABCD$ so einbeschrieben, daß die Eckpunkte A, B, C auf der Peripherie der Grundfläche der Halbkugel liegen und D im Scheitelpunkt der Halbkugel liegt. Das Volumen des Tetraeders sei mit V, der Umfang des Dreiecks ABC mit u bezeichnet. Weisen Sie nach, daß dann stets

$$V \leq \frac{u^3}{324}$$

gilt. Unter welchen Voraussetzungen gilt das Gleichheitszeichen?
(*37. Mathematik-Olympiade 1997/98, Klasse 10, Stufe 4*)

W.18 *Beweis:* Der einfachste Teil bei der Lösung dieser Olympiadeaufgabe besteht darin, die Formel für das Volumen eines Tetraeders hinzuschreiben: $V = \frac{1}{3}R\mathit{\Delta}$, wobei $\mathit{\Delta}$ der Flächeninhalt der Grundfläche und $h = R$ die Höhe des Tetraeders senkrecht zu dieser Grundfläche ist. Wenn uns nun die Gleichung aus Aufgabe D.64 geläufig ist, nämlich $\mathit{\Delta} = abc/(4R)$ mit a, b, c als Seitenlängen von $\triangle ABC$ sowie R als dessen Umkreisradius, haben wir auch schon den schwierigsten Teil geschafft:

$$V = \frac{abc}{12}. \tag{W.112}$$

Die Aufgabe verlangt nun, das Produkt abc durch die Summe $u \equiv a + b + c$ nach oben abzuschätzen. Dies erreichen wir durch Anwendung der AM-GM-Ungleichung (vgl. Aufgabe U.15):

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \qquad \text{bzw.} \qquad abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} = \frac{u^3}{27}. \tag{W.113}$$

(W.113) in (W.112) eingesetzt, liefert die Behauptung. □
Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn in (U.24) $a = b = c$ gilt, die Grundfläche also ein *gleichseitiges* Dreieck ist.