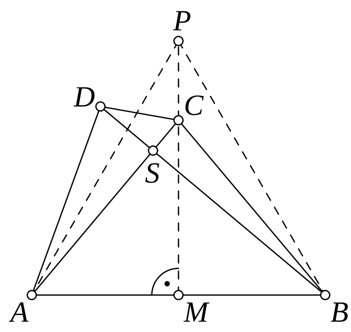
W.23 Für ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den Diagonalen AC und BD seien folgende Winkelgrößen vorausgesetzt: $\measuredangle CBD = 10°$, $\measuredangle CAD = 20°$, $\measuredangle ABD = 40°$, $\measuredangle BAC = 50°$. Man berechne die Größen der beiden Innenwinkel $\measuredangle BCD$ und $\measuredangle ADC$ des Vierecks $ABCD$.
(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 11–13, Stufe 4*)

W.23 (Bild) Aus dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ABC und ABD folgt mit den gegebenen Winkelgrößen $\measuredangle ACB = 80°$ und $\measuredangle ADB = 70°$. Letztere beiden Dreiecke sind daher gleichschenklig mit $CA = CB$ bzw. $BD = BA$. Es sei nun P derjenige Punkt, der auf derselben Seite der Geraden durch A, B liegt wie C und für den $\triangle ABP$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Die Punkte P, C sowie der Mittelpunkt M von AB liegen auf der Mittelsenkrechten von AB, und es gilt



$$\measuredangle APM = \measuredangle BPM = 30°,$$

$$\measuredangle ACM = \measuredangle BCM = 40°.$$

Nach Kongruenzsatz SWS ist $\triangle BCD \cong \triangle BCP$ wegen der gemeinsamen Seite BC, $\measuredangle CBD = \measuredangle CBP = 10°$ sowie $BD = BA = BP$; daher gilt $\measuredangle BDC = \measuredangle BPC = 30°$. Damit und nach dem Satz über die Winkelsumme im Viereck ergeben sich die beiden gesuchten Innenwinkelgrößen:

$$\measuredangle ADC = \measuredangle ADB + \measuredangle BDC = 70° + 30° = 100°,$$

$$\measuredangle BCD = 360° - 50° - 70° - 100° = 140°.$$