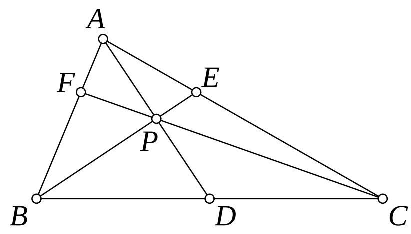
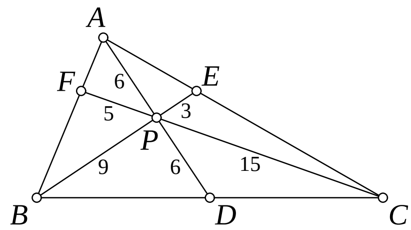
W.31 (Bild) Im $\triangle ABC$ treffen sich AD, BE, CF in einem Punkt P derart, daß $AP = PD = 6$, $EP = 3$, $PB = 9$ und $CF = 20$ ist. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?
(*AIME, 1989*)



W.31 (Bild) Zwei der durch P vorgegebenen Teilungsverhältnisse $u \equiv AP/PD = 1$ und $v \equiv BP/PE = 3$ sind uns bekannt; mit Hilfe des Satzes von EULER-GERGONNE (s. Aufgabe M.56) können wir das dritte Verhältnis daher sofort berechnen:



$$w \equiv \frac{CP}{PF} = \frac{u+v+2}{uv-1} = 3.$$

Daraus folgt $CP = 15$ und $PF = 5$. Weiterhin erlaubt uns die Tabelle M.1, die Streckenverhältnisse auf den Seiten des Dreiecks ABC zu bestimmen:

$$x \equiv \frac{BD}{DC} = \frac{1+v}{1+w} = 1, \qquad y \equiv \frac{CE}{EA} = \frac{1+w}{1+u} = 2, \qquad z \equiv \frac{AF}{FB} = \frac{1+u}{1+v} = \frac{1}{2}.$$

Nun kennen wir in den Dreiecken PBC, PCA und PAB jeweils die Längen zweier Seiten, die Länge einer zugehörigen Ecktransversalen sowie das Teilungsverhältnis auf der gegenüberliegenden Seite. Mit Hilfe des Satzes von STEWART (s. Aufgabe D.69) können wir somit die Längen $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$ berechnen:

$$\begin{aligned}
PD^2 &= p \cdot PC^2 + q \cdot PB^2 - pqa^2, &\quad &\text{mit } p = q = \tfrac{1}{2}: &\quad a^2 &= 468,\\
PE^2 &= p \cdot PA^2 + q \cdot PC^2 - pqb^2, &\quad &\text{mit } p = \tfrac{2}{3},\ q = \tfrac{1}{3}: &\quad b^2 &= 405,\\
PF^2 &= p \cdot PB^2 + q \cdot PA^2 - pqc^2, &\quad &\text{mit } p = \tfrac{1}{3},\ q = \tfrac{2}{3}: &\quad c^2 &= 117.
\end{aligned}$$

Den gesuchten Flächeninhalt liefert uns schließlich HERONs Formel (s. Lösung zu Aufgabe D.66):

$$16\,[ABC]^2 = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 186\,624,$$

also $[ABC] = 108$.