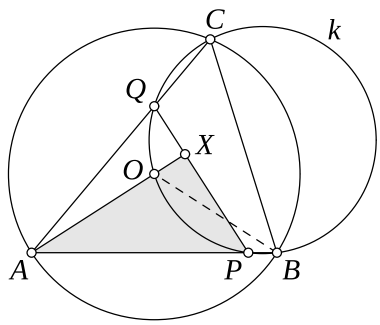
W.34 $\triangle ABC$ sei ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt O. Der Kreis k gehe durch C, O und B. Die Seiten AB und AC schneiden k ein weiteres Mal in P bzw. Q. Man beweise, daß die Geraden AO und PQ senkrecht aufeinander stehen.
(*Großbritannien, 1996*)

W.34 *Beweis:* (Bild) Da die Strecken AO und PQ sich nicht schneiden, verlängern wir AO über O hinaus und bezeichnen den Schnittpunkt mit X. Wir haben also $\measuredangle AXQ = 90^\circ$ zu zeigen. Nun ist $\measuredangle AXQ$ Außenwinkel in $\triangle AXP$ und als solcher gleich der Summe der Innenwinkel $\measuredangle PAX = \measuredangle BAO$ und $\measuredangle APX$. Letzterer ist Nebenwinkel zu $\measuredangle BPX$, der wiederum Supplementwinkel zu $\measuredangle BCQ$ im Sehnenviereck $PBCQ$ ist. Somit haben wir



$$\measuredangle AXQ = \measuredangle BAO + \measuredangle BCQ = \measuredangle BAO + \measuredangle BCA$$

und sind mit unseren Winkeln wieder vollständig in $\triangle ABC$. Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz gilt weiter $\measuredangle BCA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$, und da $\triangle BOA$ gleichschenklig ist: $\measuredangle BCA = 90^\circ - \measuredangle BAO$. Diese Beziehung in obige Gleichung eingesetzt, ergibt die Behauptung. $\square$