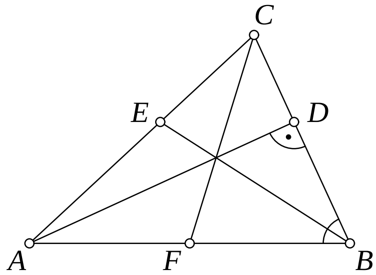
W.36 Seien D, E, F Punkte auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC derart, daß $AD \perp BC$, BE die Winkelhalbierende von $\measuredangle ABC$ und F der Mittelpunkt von AB ist. Beweise, daß sich AD, BE und CF dann und nur dann in einem Punkt schneiden, wenn folgende Gleichung gilt:

$$a^2(a-c) = (b^2-c^2)(a+c).$$

(*Irland, 1999*)

W.36 *Beweis:* (Bild) Der Satz von CEVA ist doch ein guter Freund! Bisher hatten wir es jedoch stets mit untereinander gleichen Ecktransversalen zu tun; hier treten zur Abwechslung mal eine Höhe, eine Winkel- sowie eine Seitenhalbierende auf. Wir zeigen zuerst: Wenn sich alle drei Ecktransversalen in einem Punkt schneiden, dann gilt die angegebene Gleichung. Nach CEVA gilt nun:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \tag{W.115}$$



Wir benutzen $AF = FB$, $CE/EA = a/c$ (nach Aufgabe D.8) sowie

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, \qquad DC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

(nach Aufgabe D.72). Damit wird aus (W.115) zunächst $a \cdot BD = c \cdot DC$ und weiter

$$a(a^2 + c^2 - b^2) = c(a^2 + b^2 - c^2), \qquad aa^2 - a(b^2 - c^2) = ca^2 + c(b^2 - c^2),$$
$$a^2(a - c) = (a + c)(b^2 - c^2). \tag{W.116}$$

Die Umkehrung gilt ebenfalls: Von (W.116) gelangen wir durch äquivalente Umformungen und mit eindeutigen Ausdrücken zu (W.115). Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA schneiden sich mithin die drei unterschiedlichen Ecktransversalen in einem Punkt. □