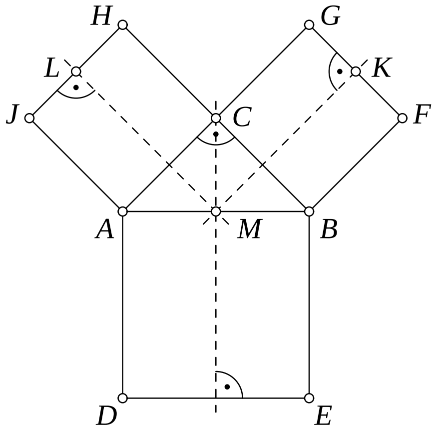
W.4 Gegeben sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C und der Kathetenlänge 2. Über den Seiten des Dreiecks seien nach außen die Quadrate $ABED$, $BCGF$ und $CAJH$ gezeichnet. Beweisen Sie, daß es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte D, E, F, G, H und J liegen und berechnen Sie den Radius dieses Kreises.
(*39. Mathematik-Olympiade 1999/2000, Klasse 9, Stufe 3*)

W.4 (Bild) Der erste Schritt ist es herauszufinden, wo der Mittelpunkt M des Kreises liegen könnte, falls es ihn gibt. Nehmen wir also an, daß $DEFGHJ$ ein einem Kreis einbeschriebenes Sechseck ist. Dessen Seiten sind dann Sehnen dieses Kreises. Die Mittelsenkrechten aller dieser Sehnen müßten sich folglich in M treffen. Aufgrund der Symmetrie der Figur vermuten wir, daß M der Mittelpunkt der Strecke AB ist. *Beweis:* Dann sind die Trapeze $MBFK$, $MCGK$, $MCHL$ und $MAJL$ offensichtlich kongruent, und wir können den Radius $r \equiv MF = MG = MH = MJ$ nach dem Satz des PYTHAGORAS berechnen ($AC = BC \equiv a$ gesetzt):



$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}a.$$

Ebenso erhalten wir

$$MD = ME = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}a = \frac{\sqrt{10}}{2}a = r,$$

d. h., der Kreis existiert. $\square$ Mit $a = 2$ beträgt der Radius somit $r = \sqrt{10}$.