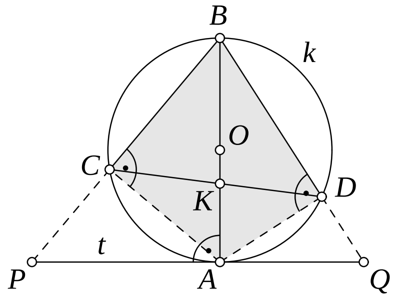
W.42 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r, AB sei ein fester Durchmesser von k und K ein fester Punkt auf der Strecke AO. t sei die Tangente an k in A. Für eine beliebige Sehne CD, die durch K geht und von AB verschieden ist, werden die Punkte P und Q als Schnittpunkte von BC bzw. BD mit t konstruiert. Man beweise, daß das Produkt $AP \cdot AQ$ konstant bleibt, wenn die Sehne CD variiert wird.
(*Österreichisch-Polnischer Mathematik-Wettbewerb, 1992*)

W.42 *Beweis:* (Bild) Wir erkennen mit ein wenig Übung unmittelbar $\triangle BAP \sim \triangle BCA$ und $\triangle BAQ \sim \triangle BDA$, da sämtliche Dreiecke rechtwinklig sind und jeweils in den Winkeln $\measuredangle ABP$ bzw. $\measuredangle ABQ$ übereinstimmen. Daraus folgen die Proportionen

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CA}{CB} \quad \text{und} \quad \frac{AQ}{AB} = \frac{DA}{DB}.$$



Multiplikation beider Gleichungen liefert

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB^2} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB}. \tag{W.117}$$

Da $ADBC$ ein Sehnenviereck ist, bestehen außerdem die Ähnlichkeiten $\triangle ACK \sim \triangle DBK$ und $\triangle DAK \sim \triangle BCK$, somit

$$\frac{CA}{BD} = \frac{CK}{BK}, \quad \frac{DA}{BC} = \frac{AK}{CK}, \qquad \text{also} \qquad \frac{CA}{BD} \cdot \frac{DA}{BC} = \frac{CK}{BK} \cdot \frac{AK}{CK} = \frac{AK}{BK}. \tag{W.118}$$

Nun folgt aus (W.117) und (W.118)

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB^2} = \frac{AK}{BK}, \quad \text{oder} \quad AP \cdot AQ = AB^2 \cdot \frac{AK}{BK} = \text{const},$$

da AB, AK als auch BK unabhängig von der Wahl von CD sind. $\square$