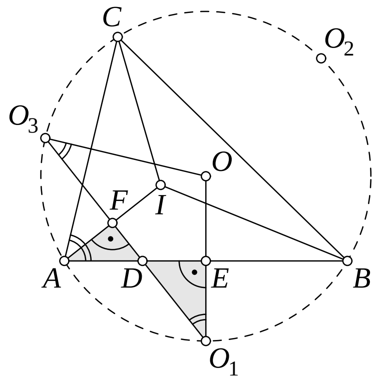
W.45 Vom Inkreismittelpunkt I eines Dreiecks ABC werden Strecken zu den Eckpunkten gezeichnet; diese zerlegen das Dreieck in drei kleinere Dreiecke. Die Umkreismittelpunkte dieser drei kleineren Dreiecke seien O_1, O_2 und O_3. Man zeige, daß dann die Umkreise von $\triangle ABC$ und $\triangle O_1O_2O_3$ konzentrisch sind.
(*USA, 1988*)

W.45 *Beweis:* (Bild) Da I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist, halbiert AI den Innenwinkel $\measuredangle CAB$. Die Umkreismittelpunkte O und O_1 liegen weiterhin auf der Mittelsenkrechten von AB; O_1 und O_3 auf der Mittelsenkrechten von AI. Bezeichnen wir die Schnittpunkte von O_1O und AB mit E sowie von O_1O_3 und AB bzw. AI mit D bzw. F, so sind



die beiden Dreiecke ADF und O_1DE offenbar ähnlich, da sie außer in den rechten Winkeln noch in den Scheitelwinkeln $\measuredangle ADF = \measuredangle O_1DE$, also in allen drei Winkeln übereinstimmen. Somit ist

$$\measuredangle IAB = \measuredangle O_3O_1O.$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß $\measuredangle IAC = \measuredangle O_1O_3O$ ist. $\triangle O_1OO_3$ hat daher gleiche Basiswinkel und ist folglich gleichschenklig. Völlig analog zeigen wir $OO_1 = OO_2$, also $OO_1 = OO_2 = OO_3$. Daraus folgt, daß der Umkreismittelpunkt O des Dreiecks ABC mit demjenigen von $\triangle O_1O_2O_3$ zusammenfällt. $\square$