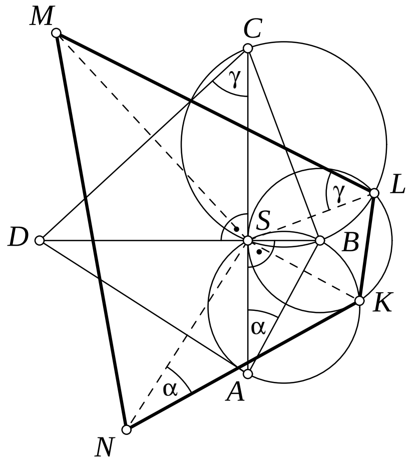
W.46 $ABCD$ sei ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich rechtwinklig in S schneiden. Man beweise, daß dann die zu den Seiten des Vierecks AB, BC, CD, DA spiegelbildlichen Punkte von S ein Sehnenviereck bilden.
(*USA, 1993*)

$\boxed{\text{W.46}}$ *Beweis:* (Bild) Die zu AB, BC, CD, DA spiegelbildlichen Punkte von S seien K, L, M bzw. N. Um nun zu zeigen, daß $KLMN$ ein Sehnenviereck ist, genügt es nachzuweisen, daß in ihm gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel sind: $\measuredangle KLM = \measuredangle MNK$. Bezeichnen wir dazu weiter $\measuredangle BAS \equiv \alpha$ und $\measuredangle DCS \equiv \gamma$. Nun ist $ASBK$ nach Voraussetzung $AS \perp SB$ ein Drachenviereck, gleiches gilt für $BSCL, CSDM$ und $DSAN$.



Somit gilt $BK = BS = BL$, d. h., Eckpunkt B ist Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle KLS$. Analog folgt: C ist Umkreismittelpunkt von $\triangle LMS$, D von $\triangle MNS$ bzw. A von $\triangle NKS$. Diese Kreise erlauben es nun, die Winkel α und γ aus $ABCD$ wie folgt in das Viereck $KLMN$ zu transportieren: $\measuredangle SBK = 180° - 2\alpha$ ist Zentriwinkel über der Sehne SK, also ist $\measuredangle SLK = 90° - \alpha$. Mit dem gleichen Argument erhalten wir $\measuredangle SLM = \gamma$, $\measuredangle SNM = 90° - \gamma$, $\measuredangle SNK = \alpha$. Durch Addition folgt:

$$\measuredangle KLM = \measuredangle SLK + \measuredangle SLM = (90° - \alpha) + \gamma \quad \text{und}$$

$$\measuredangle MNK = \measuredangle SNM + \measuredangle SNK = (90° - \gamma) + \alpha,$$

schließlich, wie gefordert, $\measuredangle KLM + \measuredangle MNK = 180°$. $\square$