

**W.51** Im  $\triangle ABC$  sei  $AC = BC$ . Ein Kreis  $k$  liegt so, daß er den Umkreis des Dreiecks  $ABC$  von innen berührt, und die Seiten  $AC$ ,  $BC$  Tangenten an  $k$  mit den Berührungspunkten  $P$ ,  $Q$  sind. Man beweise, daß der Mittelpunkt von  $PQ$  der Inkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABC$  ist.  
(20. IMO, Rumänien, Bukarest, 1978)

**W.51** *Beweis:* (Bild) Wegen  $AC = BC$  ist unsere Figur symmetrisch bezüglich des Durchmessers  $CM$  des Umkreises, wobei  $M$  der Berührungspunkt von  $k$  mit dem Umkreis ist. Nun halbiert  $CM$  den Scheitelwinkel  $\angle ACB$ , den Winkel  $\angle PMQ$  sowie die Strecke  $PQ$ , welche wegen  $PC = QC$  und der daraus folgenden Ähnlichkeit der Dreiecke  $ACB$  und  $PCQ$  parallel zu  $AB$  ist, und deren Mittelpunkt wir mit  $I$  bezeichnen. Für die Basiswinkel in beiden gleichschenkligen Dreiecken schreiben wir  $\angle CPQ = \angle CAB \equiv 2\beta$ . Nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz ist daher auch  $\angle PMQ = \angle CPQ = 2\beta$ , also  $\angle PMI = \frac{1}{2}\angle PMQ = \beta$ . Weiterhin ist  $AMIP$  wegen  $\angle CAM = \angle PAM = 90^\circ$  und  $\angle PIM = 90^\circ$  ein Sehnenviereck, in dem  $\angle PMI = \angle PAI = \beta$  gleich große Peripheriewinkel sind. Somit halbiert  $AI$  den Innenwinkel  $\angle CAB$ .  $I$  ist folglich als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden der Mittelpunkt des Inkreises von  $\triangle ABC$ .  $\square$

