

W.51 Im $\triangle ABC$ sei $AC = BC$. Ein Kreis k liegt so, daß er den Umkreis des Dreiecks ABC von innen berührt, und die Seiten AC , BC Tangenten an k mit den Berührungspunkten P , Q sind. Man beweise, daß der Mittelpunkt von PQ der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist.
(20. IMO, Rumänien, Bukarest, 1978)

W.51 *Beweis:* (Bild) Wegen $AC = BC$ ist unsere Figur symmetrisch bezüglich des Durchmessers CM des Umkreises, wobei M der Berührungspunkt von k mit dem Umkreis ist. Nun halbiert CM den Scheitelwinkel $\angle ACB$, den Winkel $\angle PMQ$ sowie die Strecke PQ , welche wegen $PC = QC$ und der daraus folgenden Ähnlichkeit der Dreiecke ACB und PCQ parallel zu AB ist, und deren Mittelpunkt wir mit I bezeichnen. Für die Basiswinkel in beiden gleichschenkligen Dreiecken schreiben wir $\angle CPQ = \angle CAB \equiv 2\beta$. Nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz ist daher auch $\angle PMQ = \angle CPQ = 2\beta$, also $\angle PMI = \frac{1}{2}\angle PMQ = \beta$. Weiterhin ist $AMIP$ wegen $\angle CAM = \angle PAM = 90^\circ$ und $\angle PIM = 90^\circ$ ein Sehnenviereck, in dem $\angle PMI = \angle PAI = \beta$ gleich große Peripheriewinkel sind. Somit halbiert AI den Innenwinkel $\angle CAB$. I ist folglich als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$. \square

