

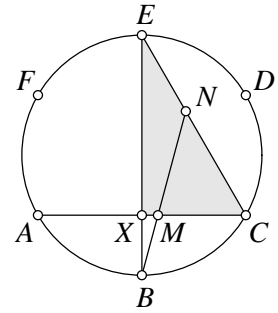
**W.53** Die Diagonalen  $AC$  und  $CE$  eines regulären Sechsecks  $ABCDEF$  werden durch die auf ihnen liegenden Punkte  $M$  und  $N$  so geteilt, daß

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

gilt. Man bestimme  $r$ , wenn  $B$ ,  $M$  und  $N$  kollinear sind.  
(23. IMO, Ungarn, Budapest, 1982)

**W.53** (Bild) Angenommen,  $B$ ,  $M$  und  $N$  sind kollinear und jede Seite des Sechsecks habe die Länge eins. Es bietet sich an,  $r$  mit Hilfe des Satzes von MENELAUS (s. Aufgabe D.43) zu bestimmen. Dazu sei  $X$  der Schnittpunkt von  $AC$  mit  $BE$ . Die Punkte  $B$ ,  $M$  und  $N$  müssen nun auf den (gegebenenfalls verlängerten) Seiten eines Dreiecks liegen; wir finden das Dreieck  $CEX$  als ein solches und schreiben den Satz von MENELAUS hierfür hin:

$$\frac{CN}{NE} \cdot \frac{EB}{BX} \cdot \frac{XM}{MC} = -1. \quad (\text{W.121})$$



Nun versuchen wir, jede dieser Längen durch  $r$  auszudrücken. Mit  $AC = CE = \sqrt{3}$ ,  $AX = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $EB = 2$  und  $BX = -\frac{1}{2}$  (das Minuszeichen rührt vom entgegengesetzten Richtungssinn zu  $EB$ ) errechnen wir:

$$\begin{aligned} CN &= AM = \sqrt{3}r, & NE &= CE - CN = \sqrt{3}(1 - r), \\ XM &= AM - AX = \sqrt{3}\left(r - \frac{1}{2}\right), & MC &= AC - AM = \sqrt{3}(1 - r). \end{aligned}$$

Dies in (W.121) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}(1 - r)} \cdot \frac{2}{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}\left(r - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}(1 - r)} = -1 \quad \text{oder} \quad 4r\left(r - \frac{1}{2}\right) = (1 - r)^2,$$

woraus schließlich  $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$  folgt.