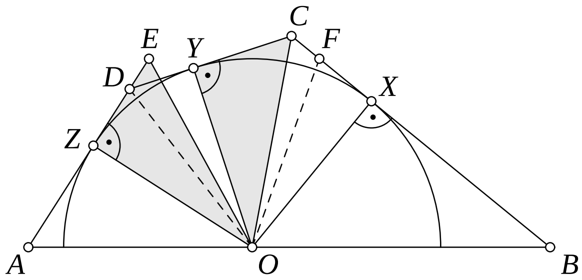
W.54 Der Mittelpunkt eines Kreises möge auf der Seite AB eines Vierecks $ABCD$ liegen, das gleichzeitig ein Sehnenviereck ist. Die drei anderen Seiten dieses Vierecks liegen tangential an dem Kreis. Man beweise:

$$AD + BC = AB.$$

(*26. IMO, Finnland, Joutsa/Helsinki, 1985*)

W.54 *Beweis:* (Bild) O sei der Mittelpunkt des Kreises auf der Seite AB; die Berührungspunkte mit den anderen Seiten seien X, Y bzw. Z. Wir drehen nun das rechtwinklige Dreieck OYC so um O, daß es in $\triangle OZE$ übergeht, wobei E auf der Verlängerung von AD liegt. Bezeichnen wir $\varepsilon \equiv \measuredangle OCY = \measuredangle OEZ$, dann ist auch $\measuredangle OCX = \varepsilon$. Da $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\measuredangle OAE = 180° - 2\varepsilon$ und weiter $\measuredangle AOE = 180° - (\varepsilon + 180° - 2\varepsilon) = \varepsilon = \measuredangle AEO$. Das Dreieck OAE ist somit gleichschenklig und wir erhalten:



$$AO = AE = AZ + YC = AZ + CX.$$

Mit derselben Begründung, d. h. durch Drehung von $\triangle OYD$ um O in $\triangle OXF$ usw., folgt

$$BO = BF = BX + YD = BX + DZ.$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt die Behauptung: $AB = AD + BC$. □