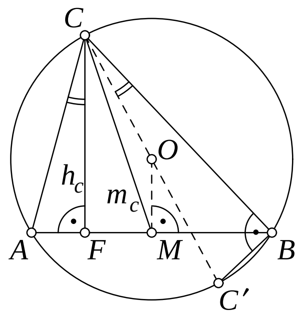
W.71 Gegeben sei ein nicht-gleichschenkliges Dreieck ABC. Seine Winkelhalbierende w_c soll gleichzeitig den Winkel zwischen der Höhe h_c und der Seitenhalbierenden m_c halbieren. Man beweise, daß dann das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
(*IMO-Auswahlwettbewerb Deutschland, 1999*)

W.71 *Beweis:* (Bild) Aufmerksame Leser haben vielleicht sofort eine Idee: Aus Aufgabe D.42 wissen wir, daß der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt isogonal konjugierte Punkte sind. Daraus folgt, daß die Winkelhalbierende w_c gleichzeitig die Winkelhalbierende der Geraden CF (identisch mit der Geraden h_c) und des Durchmessers COC' des Umkreises des Dreiecks ABC ist. Nach Voraussetzung soll nun m_c isogonal zu h_c sein (gleichbedeutend damit, daß Höhe und Symmediane zusammenfallen), mithin muß O auf der Seitenhalbierenden CM liegen. Das ist jedoch nur zu erfüllen, wenn O mit M zusammenfällt. AB ist somit Durchmesser und $\triangle ABC$ nach dem Satz des THALES rechtwinklig bei C. $\square$



Bemerkung: Eine andere Formulierung dieses Satzes ist:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Symmediane der Hypotenuse zugleich Höhe.