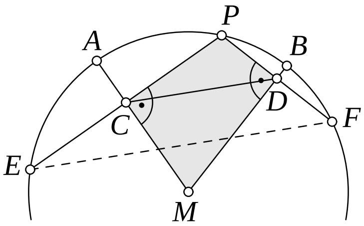
W.8 In einem beliebig gegebenen Kreisausschnitt AMB, dessen Zentriwinkel $\measuredangle AMB$ eine Größe kleiner als $90°$ hat, werden von einem beliebigen Punkt P des Bogens AB die Lote auf die Radien MA und MB gefällt; die Fußpunkte seien mit C bzw. D bezeichnet. Beweisen Sie, daß die Länge der Strecke CD unabhängig von der Lage des Punktes P auf dem Bogen AB ist.
(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 9, Stufe 4*)

W.8 *Beweis:* (Bild) Wir verlängern die Lote von P auf die Radien über die Fußpunkte C, D hinaus bis zum Schnitt mit dem Kreis in den Punkten E, F. Nach dem Satz, daß jeder Radius die zu ihm senkrechten Sehnen halbiert, gilt

$$\frac{PC}{PE} = \frac{PD}{PF} = \frac{1}{2}.$$



Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes folgt hieraus $CD \parallel EF$ und nach dem zweiten Strahlensatz $EF = 2CD$. Wegen $\measuredangle MCP = \measuredangle MDP = 90°$ gilt nach dem Satz von der Winkelsumme im Viereck $\measuredangle EPF = \measuredangle CPD = 180° - \measuredangle AMB$ (d. h. $CPDM$ ist ein Sehnenviereck). Also ist die Größe des Winkels $\measuredangle EPF$ von der Wahl des Punktes P unabhängig. Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt daraus, daß die Länge EF ebenso von der Wahl des Punktes P unabhängig ist. Damit ist auch CD unabhängig von P. □