

W.84 $ABCD$ sei ein Quadrat mit dem Inkreis Γ . Eine Tangente l an Γ schneide AB und AD sowie die Diagonale AC in den Punkten P , Q bzw. R . Beweise, daß

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AR}{RC} + \frac{AQ}{QD} = 1.$$

(*Cruz Mathematicorum* 2114, März 1996)

W.84 *Beweis:* (Bild) Die Seitenlänge des Quadrats sei a , außerdem benutzen wir $PB \equiv x$ und $QD \equiv y$. Mit $AP = a - x$, $AQ = a - y$ und $PQ = x + y - a$ liefert der Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck APQ :

$$(a - x)^2 + (a - y)^2 = (x + y - a)^2 \implies 2xy = a^2. \quad (\text{W.123})$$

Ferner ist AR Winkelhalbierende im Dreieck APQ . Nach (D.108) erhalten wir (nach kurzer Rechnung)

$$AR^2 = \frac{a^2}{2} \left[\frac{3a - 2(x + y)}{2a - (x + y)} \right]^2$$

und weiter

$$AR = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{3a - 2(x + y)}{2a - (x + y)}, \quad RC = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{a}{2a - (x + y)} \implies \frac{AR}{RC} = 3 - 2 \frac{x + y}{a}.$$

Damit wird

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QD} = \frac{a - x}{x} + \frac{a - y}{y} = a \frac{x + y}{xy} - 2 = 2 \frac{x + y}{a} - 2.$$

Dabei wurde das obige Resultat (W.123) benutzt. Schließlich folgt:

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QD} + \frac{AR}{RC} = \left(2 \frac{x + y}{a} - 2 \right) + \left(3 - 2 \frac{x + y}{a} \right) = 1. \quad \square$$

Vgl. auch Aufgabe W.61.

