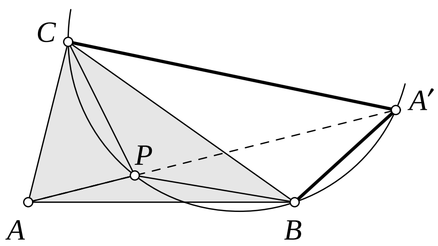
W.85 P sei ein Punkt im Innern des Dreiecks ABC mit den Seiten a, b und c. AP schneide den Kreis durch B, P, C ein zweites Mal in A'. Definiere B' und C' analog. Beweise, daß für den Umfang p des Sechsecks $AB'CA'BC'$ gilt:

$$p \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

(*Crux Mathematicorum 2301*, Februar 1998)

W.85 *Beweis:* (Bild) Bezeichnen wir die Winkel bei P mit $\measuredangle BPC \equiv x$, $\measuredangle CPA \equiv y$ und $\measuredangle APB \equiv z$, so ist mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes leicht zu erkennen, daß das Dreieck $BA'C$ an den Eckpunkten in dieser Reihenfolge die Innenwinkel $\pi - y$, $\pi - x$ bzw. $\pi - z$ hat. Die Längen der Seiten BA' und $A'C$ dieses Dreiecks lassen sich nun mit dem Sinussatz berechnen:



$$BA' = a\,\frac{\sin(\pi - z)}{\sin(\pi - x)} = a\,\frac{\sin z}{\sin x}, \qquad A'C = a\,\frac{\sin y}{\sin x}, \quad \text{somit}$$

$$BA' + A'C = a\,\frac{\sin y + \sin z}{\sin x} = (\sin x + \sin y + \sin z)\frac{a}{\sin x} - a.$$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir für die Längen der anderen Seiten des Sechsecks analoge Ausdrücke, so daß für dessen Umfang folgt:

$$p = (\sin x + \sin y + \sin z)\left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin y} + \frac{c}{\sin z}\right) - (a + b + c).$$

Das Produkt der beiden Klammerausdrücke verlangt förmlich danach, durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung abgeschätzt zu werden (vgl. Aufgabe U.23):

$$p \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - (a + b + c) = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}). \quad \square$$