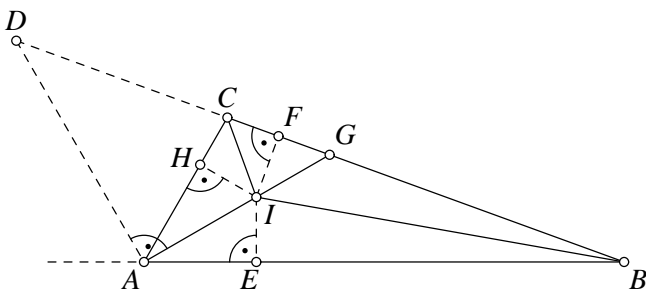


W.87 Angenommen, im $\triangle ABC$ erfüllen die Winkel β und γ die Bedingung $\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, die äußere Winkelhalbierende von α schneide die Verlängerung von BC in D , und die Seite AB berühre den Inkreis von $\triangle ABC$ in E . Man beweise: $CD = 2AE$.
(*Cruz Mathematicorum* 2303, Februar 1998)

W.87 *Beweis:* (Bild) Jede Seite wird vom Inkreismittelpunkt I aus unter einem Winkel gesehen, der gleich dem um 90° vermehrten halben Gegenwinkel der Seite ist (vgl. Aufgabe D.9). Somit ist in unserem Dreieck gerade nach Voraussetzung $\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta = \gamma$. Ist G der



Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden AI mit BC , so folgt aus $\angle ACI = \angle ICG = \frac{1}{2}\gamma$ und $\angle CIG = 180^\circ - \angle AIC = 180^\circ - \gamma$, daß auch $\angle ICG = \frac{1}{2}\gamma$ gilt; $\triangle CIG$ hat gleiche Basiswinkel und ist daher gleichschenkelig. F und H seien die beiden anderen Berührungspunkte des Inkreises von $\triangle ABC$ mit BC und AC . Mithin ist

$$2CF = CG. \quad (\text{W.127})$$

Die Drachenvierecke $AHIE$ und $CHIF$ werden dann durch ihre Diagonalen AI und CI in jeweils kongruente Dreiecke $\triangle AHI \cong \triangle AEI$ bzw. $\triangle CHI \cong \triangle CFI$ zerlegt. Insbesondere ist also

$$AE = AH \quad \text{bzw.} \quad CH = CF. \quad (\text{W.128})$$

Den Beweis führen wir nun aus der Ähnlichkeit der beiden Dreieckspaare:

$$\text{a) } \triangle ACG \sim \triangle AIC \quad \text{und} \quad \text{b) } \triangle ADG \sim \triangle FIC. \quad (\text{W.129a,b})$$

Um dieses zu zeigen, genügt es nachzuweisen, daß sie jeweils in zwei Winkeln übereinstimmen. Im Fall a) ist $\angle ACG = \angle AIC = \gamma$ und $\angle CGA = \angle ICA = \frac{1}{2}\gamma$; im Fall b) $\angle ICF = \angle DGA = \frac{1}{2}\gamma$ und nach dem Satz, daß die Winkelhalbierenden der von zwei Seiten eingeschlossenen Winkel stets senkrecht aufeinander stehen (vgl. Aufgabe D.7): $\angle GAD = \angle CFI = 90^\circ$. Aus (W.129a) folgt nun mit (W.127)

$$\frac{AG}{CG} = \frac{AC}{CI} \quad \text{bzw.} \quad AG \cdot CI = CG \cdot AC = 2CF \cdot AC; \quad (\text{W.130})$$

aus (W.127b) mit (W.130)

$$\frac{DG}{AG} = \frac{CI}{CF} \quad \text{bzw.} \quad DG = \frac{AG \cdot CI}{CF} = \frac{2CF \cdot AC}{CF} = 2AC. \quad (\text{W.131})$$

Schließlich ist wegen (W.127), (W.128) und (W.131)

$$\begin{aligned} CD &= DG - CG = DG - 2CF = 2(AC - CF) = 2(AC - CH) = \\ &= 2AH = 2AE. \quad \square \end{aligned}$$