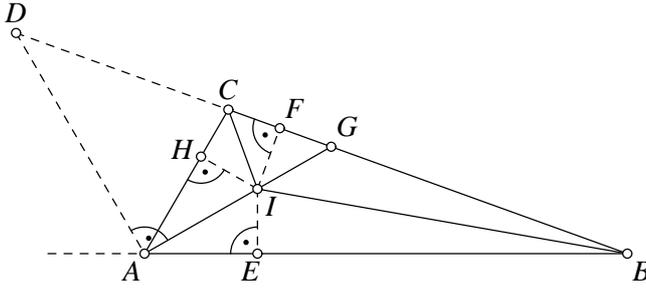


**W.87** Angenommen, im  $\triangle ABC$  erfüllen die Winkel  $\beta$  und  $\gamma$  die Bedingung  $\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$ , die äußere Winkelhalbierende von  $\alpha$  schneide die Verlängerung von  $BC$  in  $D$ , und die Seite  $AB$  berühre den Inkreis von  $\triangle ABC$  in  $E$ . Man beweise:  $CD = 2AE$ .  
(*Cruz Mathematicorum* 2303, Februar 1998)

**W.87** *Beweis:* (Bild) Jede Seite wird vom Inkreismittelpunkt  $I$  aus unter einem Winkel gesehen, der gleich dem um  $90^\circ$  vermehrten halben Gegenwinkel der Seite ist (vgl. Aufgabe D.9). Somit ist in unserem Dreieck gerade nach Voraussetzung  $\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta = \gamma$ . Ist  $G$  der



Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden  $AI$  mit  $BC$ , so folgt aus  $\angle ACI = \angle ICG = \frac{1}{2}\gamma$  und  $\angle CIG = 180^\circ - \angle AIC = 180^\circ - \gamma$ , daß auch  $\angle ICG = \frac{1}{2}\gamma$  gilt;  $\triangle CIG$  hat gleiche Basiswinkel und ist daher gleichschenkelig.  $F$  und  $H$  seien die beiden anderen Berührungspunkte des Inkreises von  $\triangle ABC$  mit  $BC$  und  $AC$ . Mithin ist

$$2CF = CG. \quad (\text{W.127})$$

Die Drachenvierecke  $AHIE$  und  $CHIF$  werden dann durch ihre Diagonalen  $AI$  und  $CI$  in jeweils kongruente Dreiecke  $\triangle AHI \cong \triangle AEI$  bzw.  $\triangle CHI \cong \triangle CFI$  zerlegt. Insbesondere ist also

$$AE = AH \quad \text{bzw.} \quad CH = CF. \quad (\text{W.128})$$

Den Beweis führen wir nun aus der Ähnlichkeit der beiden Dreieckspaare:

$$\text{a) } \triangle ACG \sim \triangle AIC \quad \text{und} \quad \text{b) } \triangle ADG \sim \triangle FIC. \quad (\text{W.129a,b})$$

Um dieses zu zeigen, genügt es nachzuweisen, daß sie jeweils in zwei Winkeln übereinstimmen. Im Fall a) ist  $\angle ACG = \angle AIC = \gamma$  und  $\angle CGA = \angle ICA = \frac{1}{2}\gamma$ ; im Fall b)  $\angle ICF = \angle DGA = \frac{1}{2}\gamma$  und nach dem Satz, daß die Winkelhalbierenden der von zwei Seiten eingeschlossenen Winkel stets senkrecht aufeinander stehen (vgl. Aufgabe D.7):  $\angle GAD = \angle CFI = 90^\circ$ . Aus (W.129a) folgt nun mit (W.127)

$$\frac{AG}{CG} = \frac{AC}{CI} \quad \text{bzw.} \quad AG \cdot CI = CG \cdot AC = 2CF \cdot AC; \quad (\text{W.130})$$

aus (W.127b) mit (W.130)

$$\frac{DG}{AG} = \frac{CI}{CF} \quad \text{bzw.} \quad DG = \frac{AG \cdot CI}{CF} = \frac{2CF \cdot AC}{CF} = 2AC. \quad (\text{W.131})$$

Schließlich ist wegen (W.127), (W.128) und (W.131)

$$\begin{aligned} CD &= DG - CG = DG - 2CF = 2(AC - CF) = 2(AC - CH) = \\ &= 2AH = 2AE. \quad \square \end{aligned}$$