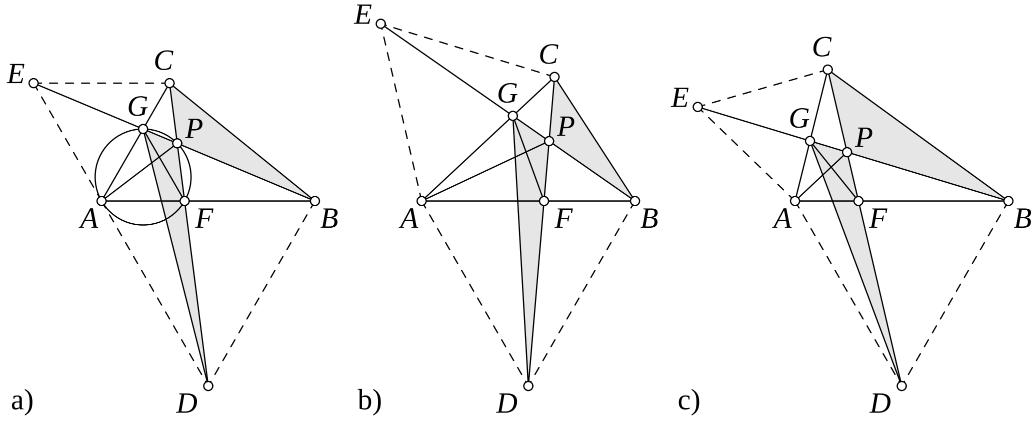
W.88 Über den Seiten $AB$ und $AC$ eines spitzwinkligen Dreiecks $ABC$ werden nach außen zwei gleichseitige Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ACE$ errichtet. Die Strecke $CD$ schneide $AB$ in $F$; $G$ sei der Schnittpunkt von $BE$ und $AC$ sowie $P$ der von $CD$ und $BE$. Unter der Voraussetzung, daß das Viereck $AFPG$ und das Dreieck $PBC$ flächengleich sind, bestimme man den Winkel $\measuredangle BAC$.
(*Crux Mathematicorum 2304*, Februar 1998)

W.88 (Bild) Die beschriebene Konstruktion läßt sofort erkennen, daß es sich bei $P$ um den FERMAT-Punkt eines spitzwinkligen Dreiecks handelt (vgl. Aufgabe D.54). Von diesem Punkt aus wird jede Dreieckseite unter einem Winkel von 120° gesehen; somit ist $\measuredangle BPC = \measuredangle FPG = 120°$. Nehmen wir zunächst an, der gesuchte Winkel $\measuredangle BAC$ betrage 60° (Bild a). Dann ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel $\measuredangle FAG + \measuredangle FPG$ gleich einem Gestreckten, und $AFPG$ ist somit ein Sehnenviereck. $\measuredangle APF = 60° = \measuredangle AGF$ sind nun Winkel über derselben Sehne $AF$, woraus folgt, daß $\triangle AFG$ gleichseitig ist. Wegen der Voraussetzung $\measuredangle EAC = \measuredangle DAB = 60°$




sind die Punkte $E$, $A$ und $D$ kollinear und daher gilt $FG \parallel DA$. Nun können wir $\triangle FAG$ in das flächengleiche $\triangle FDG$ verwandeln und erhalten somit $[AFPG] = [PDG]$. Mit $AC \parallel DB$ und $\triangle PCG \sim \triangle PDB$ folgt

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PG}{PB}, \quad \text{oder} \quad PB \cdot PC = PD \cdot PG. \tag{W.132}$$

Erinnern wir uns an die Formel $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks, ist mit (W.132) sofort klar, daß beide gerasterte Flächen im Falle $\measuredangle BAC = 60°$ gleich groß sind. Gilt dagegen $\measuredangle BAC < 60°$ (Bild b), so ist $[FAG] > [FDG]$ und wir können die Ungleichungen

$$[AFPG] > [PDG] > [PBC]$$

aufstellen. Andererseits erhalten wir für $\measuredangle BAC > 60°$ (Bild c) die Ungleichungen

$$[AFPG] < [PDG] < [PBC].$$

Je kleiner der Winkel $\measuredangle BAC$ wird, desto kleiner wird auch das Verhältnis der Flächeninhalte $q \equiv [PBC]/[AFPG]$, so daß $q$ eine monoton wachsende Funktion von $\measuredangle BAC$ ist. Daraus folgt, daß $\measuredangle BAC = 60°$ die einzige Lösung des Problems ist.