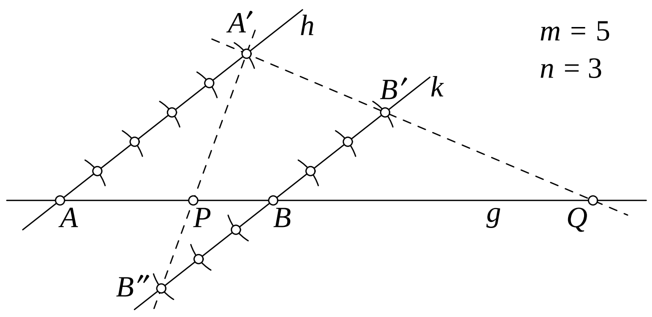
A.12 **Teilen einer Strecke.** Wie läßt sich eine gegebene Strecke a) innerlich, b) äußerlich in einem rationalen Verhältnis $m : n$ $(m, n > 0)$ teilen?

A.12 (Bild) Wir zeichnen mit dem Lineal durch A eine Gerade h, die nicht mit der durch AB gehenden Geraden g zusammenfällt. Anschließend wird eine zu h parallele Gerade k konstruiert, die durch B geht (vgl. Aufgabe A.4). Dann tragen wir eine beliebige, konstante Strecke von A ausgehend m mal hintereinander mit dem Zirkel auf h ab. Dies liefert den Punkt A'. Von B aus tragen wir auf k dieselbe Strecke n mal in beide Richtungen ab und erhalten so die Punkte B' (in derselben durch g geteilten Halbebene wie A' gelegen) und B'' (in der anderen Halbebene). a) Die Gerade durch A' und B'' schneidet dann die Strecke AB in einem Punkt P, der zwischen A und B liegt. b) Die durch A' und B' gehende Gerade schneidet g in einem Punkt Q außerhalb von AB. Diese Punkte erfüllen die geforderten Eigenschaften.



Beweis: Wegen $h \parallel k$ folgt aus dem zweiten Strahlensatz, wenn wir ihn auf die sich in P bzw. Q schneidenden Geraden anwenden:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AA'}{B''B} = \frac{m}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{AQ}{QB} = \frac{AA'}{B'B} = -\frac{m}{n}. \ \square$$

Bemerkung 1: Das in der letzten Gleichung auftretende Minuszeichen geht auf Newton zurück und rührt vom Begriff der *gerichteten Strecke* her: Befinden sich z. B. die Punkte A, B, Z so auf einer Geraden, daß B zwischen A und Z liegt, so haben AB und BZ gleichen *Richtungssinn* und AB/BZ ist positiv. Dagegen ist der Quotient AZ/ZB wegen $ZB = -BZ$ negativ.
Bemerkung 2: Soll etwa eine Strecke AB in einem Verhältnis a/b (mit gegebenen reellen Längen a und b) geteilt werden, führt natürlich die gleiche Konstruktion zum Ziel, indem auf den geschnittenen Parallelen jeweils einmal a bzw. b abgetragen werden.