A.15 **Quadratische Gleichung.** Wie lassen sich mit Zirkel und Lineal die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 \pm px \pm q = 0 \qquad \text{mit} \qquad x > 0$$

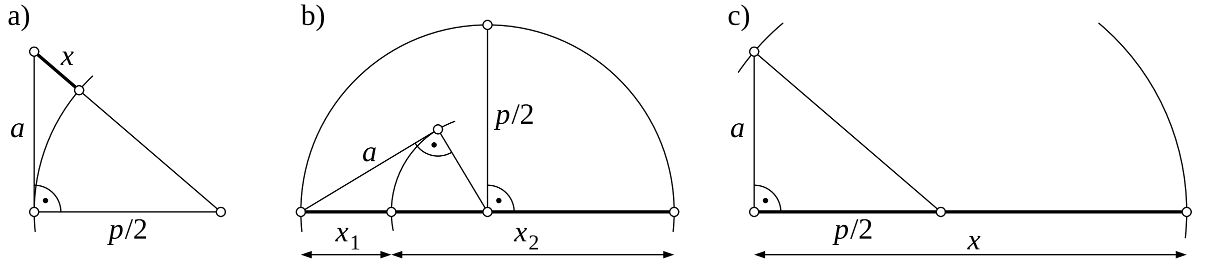
konstruieren, wenn $p > 0$ eine gegebene Länge und $q > 0$ ein gegebener Flächeninhalt (etwa durch die Kantenlänge $a \equiv \sqrt{q}$ eines Quadrates) ist?

A.15 Wir haben bezüglich des Vorzeichens des linearen und absoluten Terms wegen $x > 0$ folgende drei Fälle zu unterscheiden (mit der Abkürzung $a \equiv \sqrt{q}$):

$$\text{Fall } \mathit{1}\text{:}\quad x^2 + px - q = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + a^2},$$

$$\text{Fall } \mathit{2}\text{:}\quad x^2 - px + q = 0 \quad \text{mit den Lösungen} \quad x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - a^2},\ \ \frac{p}{2} > a,$$

$$\text{Fall } \mathit{3}\text{:}\quad x^2 - px - q = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}.$$



Durch die Struktur der Wurzeln ist die Konstruktionsidee bereits erkennbar: Wir benutzen natürlich den Satz des Pythagoras. Im Fall *1* zeichnen wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\frac{1}{2}p$ und a und vermindern die Hypotenuse um $\frac{1}{2}p$ (Bild a). Im Fall *2* wird ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse $\frac{1}{2}p$ und einer Kathete a konstruiert (Bild b). Die Länge der anderen Kathete wird dann einmal zu $\frac{1}{2}p$ addiert bzw. einmal von $\frac{1}{2}p$ subtrahiert. Der Fall *3* ist dem ersten ähnlich; die Hypotenuse wird hier um $\frac{1}{2}p$ verlängert (Bild c).