A.23 Gesucht ist der geometrische Ort für alle Punkte P, für die die Summe bzw. Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B, also

a) $PA^2 + PB^2 \equiv e^2 = \text{const}$ bzw.

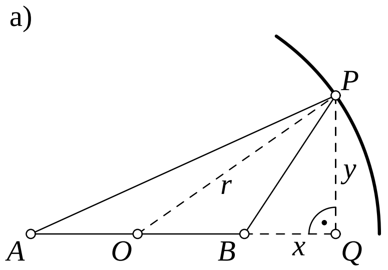
b) $PA^2 - PB^2 \equiv e^2 = \text{const}$

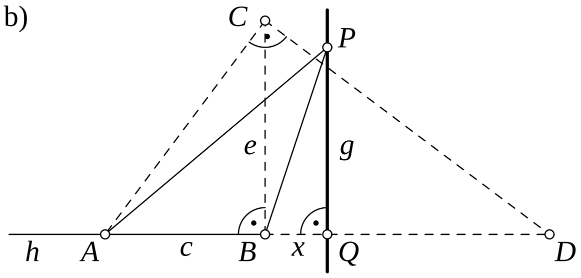
jeweils konstante Werte annehmen.

A.23 a) Für einen Punkt P sei $PA^2 + PB^2 \equiv e^2 = \text{const}$ erfüllt (Bild a). Wir ziehen die Gerade durch A, B und fällen darauf das Lot PQ. Dann gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS mit den Abkürzungen $AB \equiv c$, $BQ \equiv x$ und $PQ \equiv y$:

$$e^2 = (x + c)^2 + y^2 + x^2 + y^2 \qquad \text{bzw.}$$
$$\frac{e^2}{2} = x^2 + cx + \frac{c^2}{2} + y^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}$$

Mit O als Mittelpunkt der Strecke AB und $r \equiv \frac{1}{2}\sqrt{2e^2 - c^2}$ folgt aus der letzten Gleichung nach der Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS, daß OQP stets ein bei Q rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $OQ = x + \frac{1}{2}c$ und $PQ = y$ sowie der Hypotenuse $OP = r = \text{const}$ ist. Da O und r unabhängig von der konkreten Lage von P sind, ist der gesuchte geometrische Ort der Kreis O_r.





b) Wir betrachten eine Gerade g, die die Gerade $h(A, B)$ in einem Punkt Q senkrecht schneiden möge (Bild b). Dann gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$e^2 \equiv PA^2 - PB^2 = (AQ^2 + PQ^2) - (BQ^2 + PQ^2) = AQ^2 - BQ^2.$$

Wird also Q so gewählt, daß $AQ^2 - BQ^2$ gerade gleich dem vorgegebenen Wert von e^2 wird, ist für alle Punkte $P \in g$ die Forderung erfüllt. Mit $AB \equiv c$ und $BQ \equiv x$ erhalten wir aus letzter Gleichung $e^2 = AQ^2 - BQ^2 = c(c + 2x)$ und daraus folgende *Konstruktion*:
Von B aus wird senkrecht zu h eine Strecke der Länge $e = BC$ abgetragen. Die Senkrechte zu AC schneide h in D. Die Mittelsenkrechte von AD ist dann die gesuchte Gerade g.