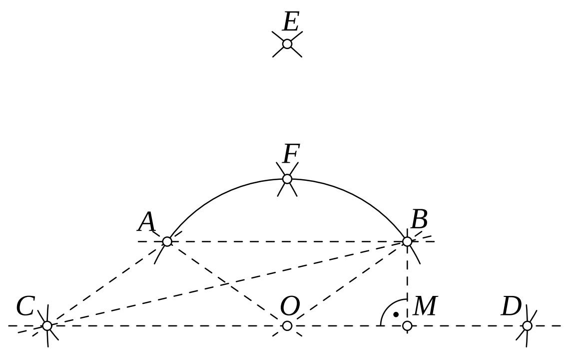
$\boxed{\text{A.44}}$ Es ist ein Kreisbogen zu halbieren.

A.44 (Bild) Es sei AB der gegebene Bogen, der zu einem Kreis mit dem Mittelpunkt O gehört. Mit Hilfe der Kreise A_O, B_O und O_{AB} bestimmen wir die Punkte C und D, so daß wir die beiden Parallelogramme $ABOC$ und $ABDO$ erhalten, die einander kongruent sind. Nun beschreiben wir von den Mittelpunkten C und D aus zwei Kreise mit dem Radius $CB = DA$ und betrachten einen von ihren Schnittpunkten, etwa E. Nennen wir dann F irgendeinen der beiden Schnittpunkte der Kreise C_{OE} und D_{OE}, so wird der Punkt F auf dem gegebenen Kreis liegen und einen der beiden Bögen AB halbieren.



Beweis: Tatsächlich liegen infolge der ausgeführten Konstruktion die Punkte C, O, D in derselben Parallelen zu AB. Da außerdem in dem Parallelogramm $ABOC$ die Diagonale AO den Seiten AC und BO gleich ist, ergibt sich für den Radius $CB = CE$:

$$CB^2 = BM^2 + CM^2 = BO^2 - OM^2 + \left(CO + OM\right)^2 = AO^2 + 2CO^2, \qquad \text{(A.102)}$$

wobei M der Mittelpunkt von OD, also $OM = \frac{1}{2} OD = \frac{1}{2} CO$ ist. Außerdem sind die Winkel $\measuredangle COE$ und $\measuredangle DOE$ Rechte, so daß

$$CE^2 = CB^2 = CO^2 + OE^2$$

gilt, und da $OE = CF$, folgt daraus

$$CB^2 = CO^2 + CF^2. \qquad \text{(A.103)}$$

Aus dem Vergleich von (A.102) und (A.103) erhalten wir $CF^2 = AO^2 + CO^2$. Da nun ferner der Winkel $\measuredangle COF$ offenbar ein Rechter ist, ergibt sich $CF^2 = CO^2 + OF^2$. Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung folgt $OA = OF$, und dies besagt, daß der Punkt F auf dem Kreis O_A liegt. Wenn wir ferner von den gleichen Winkeln $\measuredangle COF$ und $\measuredangle DOF$ die ebenfalls gleichen Winkel $\measuredangle COA$ und $\measuredangle DOB$ subtrahieren, so bleibt

$$\measuredangle AOF = \measuredangle BOF$$

übrig, was beweist, daß der Punkt F den Bogen AFB halbiert. $\square$