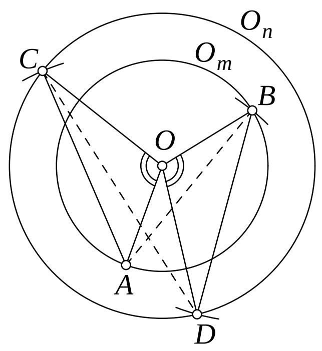
$\boxed{\textsf{A.45}}$ Gesucht ist die vierte Proportionale q zu drei gegebenen Strecken m, n und p.

A.45 (Bild) Wir beschreiben, wenn O irgendein Punkt der Ebene ist, den Kreis O_m und nehmen auf diesem zwei Punkte A und B so an, daß die Sehne AB gleich p ist. Nun bringen wir den Kreis O_n zum Schnitt mit zwei weiteren Kreisen, die A bzw. B als Mittelpunkte und einen willkürlich gewählten, in beiden Fällen gleichen Radius haben. Der Abstand zwischen diesen beiden Schnittpunkten C und D ist die gesuchte vierte Proportionale.

Beweis: Die beiden Dreiecke OAC und OBD sind nach der obigen Konstruktion kongruent (SSS), also ist

$$\measuredangle AOC = \measuredangle BOD$$



und, wenn wir zu diesen Winkeln den gemeinsamen Winkel $\measuredangle AOD$ hinzufügen (oder ihn ggf. fortnehmen): $\measuredangle COD = \measuredangle AOB$. Daraus folgt, daß die Dreiecke AOB und COD zueinander ähnlich sind; also besteht zwischen ihren Seiten die Proportion

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}.$$

Wenn wir uns erinnern, daß $OA = m$, $OC = n$ und $AB = p$ ist, so folgt daraus, daß $CD = q$ tatsächlich die vierte Proportionale zu m, n und p ist. □

Bemerkung: Wenn $p > 2m$ ist, so ist es unmöglich, in den ersten Kreis die Sehne $AB = p$ einzuzeichnen. Die angegebene Konstruktion kann in diesem Fall dennoch angewendet werden, wenn anstelle der Strecken m und n die jeweils doppelten Strecken oder, falls das nicht genügt, die dreifachen Strecken usw. genommen werden. In jedem Fall bleibt die Proportion $km : kn = m : n = p : q$ bestehen.