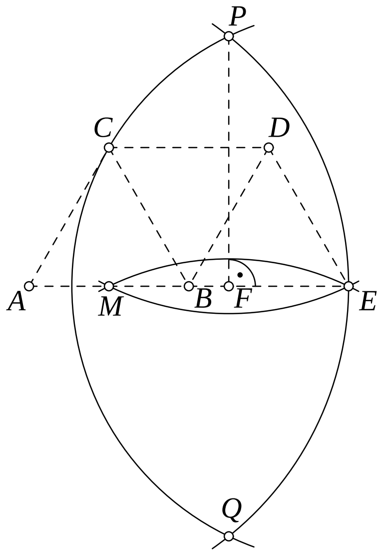
$\boxed{\text{A.50}}$ Man konstruiere den Mittelpunkt einer Strecke.

A.50 *Konstruktion:* (Bild) Es sei AB die gegebene Strecke. Wir zeichnen zunächst mit Hilfe der Punkte C, D den zu A bezüglich B symmetrischen Punkt E und dann den Kreis A_E. Auf diesem bestimmen wir die Punkte P und Q derart, daß $EP = EQ = EC$ gilt. Anschließend beschreiben wir die Kreise P_{EC} und Q_{EC}. Diese schneiden sich außer in E noch im Punkt M, der der Mittelpunkt von AB ist.

Beweis: Mit $AB \equiv a$ ist nach obiger Konstruktion

$$AE = AP = 2a, \quad CE = PE = \sqrt{3}a, \tag{A.104}$$



da CE die doppelte Höhe der beiden gegenseitig anliegenden, gleichseitigen Dreiecke BDC und BDE ist. Ist weiterhin F der Fußpunkt des Lotes von P auf AE, so gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$AP^2 = AF^2 + PF^2, \quad PE^2 = FE^2 + PF^2,$$

woraus nach Subtraktion und mit (A.104) folgt:

$$\begin{aligned} AP^2 - PE^2 &= AF^2 - FE^2 = (AF + FE) \cdot (AF - FE) \\ &= 4a^2 - 3a^2 = a^2 = 2a(AF - FE), \end{aligned}$$

oder $AF - FE = AF - MF = AM = \frac{1}{2}a$. $\square$