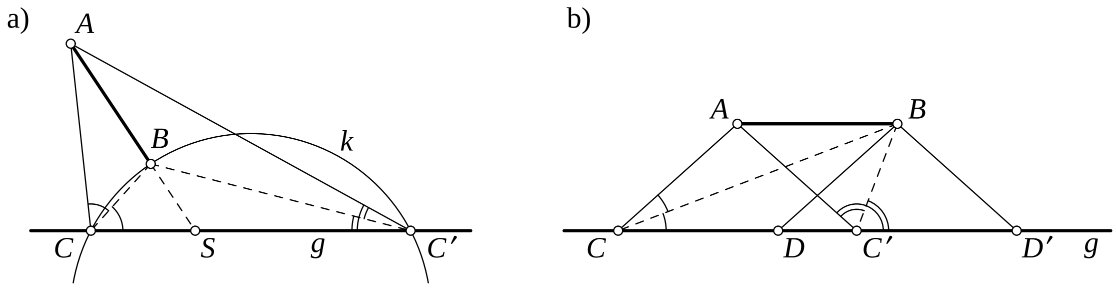
$\boxed{\text{A.68}}$ Gegeben sei eine Gerade g sowie zwei nicht auf ihr, aber in derselben Halbebene liegende Punkte A und B. Gesucht sind diejenigen Punkte C auf g, für die CB die Winkelhalbierende von CA und g ist.

A.68 Im Fall $AB \nparallel g$ können wir AB bis zum Schnitt mit g im Punkt S verlängern (Bild a). CB ist dann Winkelhalbierende im Dreieck ACS. Erinnern wir uns an den guten, alten



Satz, daß die Winkelhalbierende in einem Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt (s. Aufgabe D.8), so folgt

$$\frac{CA}{CS} = \frac{AB}{BS} \equiv q = \text{const.}$$

Dies ruft sofort den Kreis des Apollonius auf den Plan, da dieser bekanntlich der geometrische Ort aller Punkte ist, deren Quotient der Abstände CA/CS konstant ist (vgl. Aufgabe A.22). Wir haben den inneren Teilungspunkt B von AS, somit bereitet es keine Schwierigkeiten, auch den äußeren Teilungspunkt B' (im Bild nicht gezeigt) nach Aufgabe A.12 zu finden. Der Thales-Kreis k über BB' ist damit der gesuchte Kreis des Apollonius. Dessen Schnittpunkte C bzw. C' mit g haben mithin die geforderten Eigenschaften.

Im Fall $AB \parallel g$ konstruieren wir einfach die Rhomben $ABDC$ bzw. $ABD'C'$, indem wir die Kreise A_B bzw. B_A mit g zum Schnitt bringen; dies liefert die Punkte C bzw. D' (Bild b). Die Mittelsenkrechten von CB und AD' schneiden g dann in den Punkten D bzw. C'. Die geforderte Eigenschaft ergibt sich aus der Tatsache, daß die Diagonalen CB und $C'B$ gleichzeitig Winkelhalbierende in den Rhomben sind.