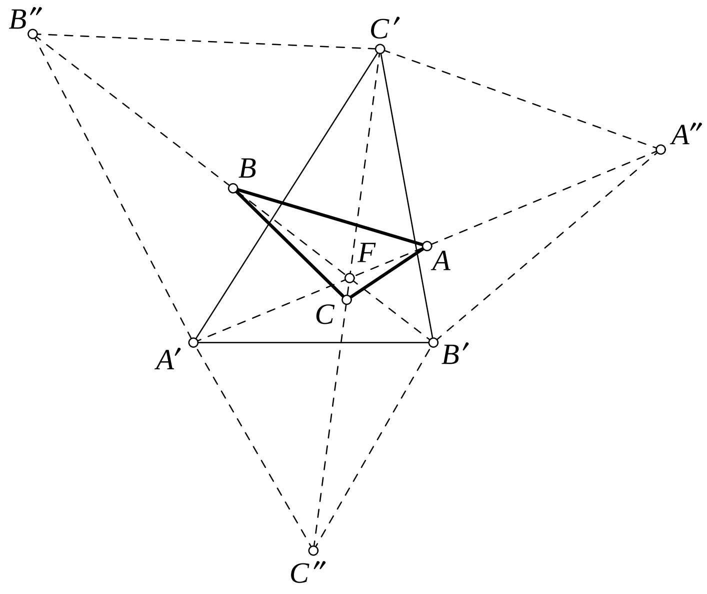
B.53 Über jede Seite eines Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel kleiner als $120°$ seien, werden gleichseitige Dreiecke BCA', CAB' und ABC' errichtet. Man (re)konstruiere $\triangle ABC$, wenn die Punkte A', B' und C' gegeben sind.

B.53 (Bild) Die Aufgabenstellung gibt uns einen eindeutigen Hinweis auf das Problem von FERMAT (s. Aufgabe D.53). Danach ist der FERMAT-Punkt F derjenige Punkt im Innern eines



Dreiecks ABC, für den gerade $\measuredangle AFB = \measuredangle BFC = \measuredangle CFA = 120°$ gilt. Gleichzeitig ist er FERMAT-Punkt des Dreiecks $A'B'C'$ (s. Aufgabe D.54). Wiederholen wir den Prozeß mit den aufgesetzten gleichseitigen Dreiecken nochmals, indem wir die Dreiecke $B'C'A''$, $C'A'B''$ und $A'B'C''$ errichten, so ist F ebenfalls der FERMAT-Punkt von $\triangle A''B''C''$. Außerdem ist klar, daß der gesuchte Eckpunkt A auf der Strecke $A'A''$, B auf $B'B''$ und C auf $C'C''$ liegt. Anstatt einen Schritt rückwärts zu gehen (von $\triangle A'B'C'$ zu $\triangle ABC$), gehen wir also einen Schritt vorwärts und anschließend zwei zurück. Um nun noch die Lagen zu berechnen, gehen wir von den Gleichungen

$$s \equiv AA' = BB' = CC' = FA + FB + FC \qquad \text{und}$$
$$A'A'' = B'B'' = C'C'' = FA' + FB' + FC' \tag{B.101}$$

aus. Wegen $FA' = AA' - FA = s - FA$ und den analogen Gleichungen $FB' = s - FB$ und $FC' = s - FC$ folgt aus (B.101)

$$A'A'' = B'B'' = C'C'' = 3s - s = 2s = 2\,AA' = 2\,BB' = 2\,CC',$$

d. h., die gesuchten Eckpunkte A, B, C sind die Mittelpunkte der Strecken $A'A''$, $B'B''$ bzw. $C'C''$.