$\boxed{\textsf{C.12}}$ Jana hat n Euro zur Verfügung. Sie will jeden Tag entweder ein Eis für einen Euro, Bonbons zu zwei Euro oder Schokolade zu zwei Euro kaufen. Wie viele Möglichkeiten hat sie dazu?

$\boxed{\text{C.12}}$ Ist $a(n)$ die gesuchte Anzahl, so gilt offenbar die Rekursionsbeziehung $a(n+2) = a(n+1) + 2a(n)$. Diese hat die charakteristische Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ mit den beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$. Damit hat die Rekursion die allgemeine Lösung $a(n) = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$. Setzen wir die bekannten Anfangswerte ein, so folgt die Lösung: $a(n) = \frac{1}{3}\left(2^n + (-1)^n\right)$.