$\boxed{\text{C.31}}$ Beweise: Es gibt ganze, von null verschiedene Zahlen a, b und c mit $\max\{|a|, |b|, |c|\} < 1\,000\,000$, derart, daß

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

C.31 Für die Wahl dreier nichtnegativer ganzer Zahlen unter 10^6 hat man 10^{18} Möglichkeiten. Für jeder solche Wahl gilt aber offenbar $0 \leq a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} < 5 \cdot 10^6$. Unterteilt man den Bereich zwischen 0 und $5 \cdot 10^6$ also in Intervalle der Breite 10^{-11}, so sind das weniger als 10^{18} Stück und für zwei Tripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) landen die zugehörigen Zahlen im selben Intervall. Damit ist $|(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} + (c_1 - c_2)\sqrt{3}| < 10^{-11}$.