C.39 Die Felder eines 5×41-Schachbrettes seien mit zwei Farben gefärbt. Man beweise, dass es ein einfarbiges 3×3-Quadrat gibt, also eine Auswahl von drei Spalten und drei Zeilen, an deren Schnittpunkten nur Felder einer Farbe liegen!

C.39 Man betrachte die Spalten des Rechtecks. Angenommen, es gäbe kein 3×3-Quadrat. Wenn eine Spalte von einer Farbe mehr als drei Felder enthält, so kann man davon ein bzw. zwei umfärben, ohne dass dabei ein einfarbiges 3×3-Quadrat entstehen könnte. Am Ende dieser Prozedur hat man also nur noch Spalten mit genau drei Feldern der einen und zwei der anderen Farbe. Davon gibt es aber nur $20 = 2 \cdot \binom{5}{2}$ verschiedene. Nach dem Schubfachschluss liefert dies also drei gleiche Spalten, was einen Widerspruch zur Annahme, es gäbe kein 3×3-Quadrat, darstellt. $\square$