$\boxed{\text{C.52}}$ Man beweise: Es gibt kein Quadrupel natürlicher Zahlen (a, b, c, d) mit

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2).$$

C.52 Wenn es Lösungen gäbe, dann auch eine (a, b), für die der Wert $a^2 + b^2$ minimal ist. Es gilt dann aber $3|a$ und $3|b$ (denn Quadratzahlen lassen bei Division durch 3 nur die Reste 0 und 1, die Summe zweier Quadratzahlen ist also nur durch 3 teilbar, wenn jede der beiden Zahlen dies ist), also ist $a = 3\tilde{a}$ und $b = 3\tilde{b}$. Damit folgt: $3(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2) = c^2 + d^2 < a^2 + b^2$. Das steht im Widerspruch zur Minimalität von $a^2 + b^2$. $\square$