$\boxed{\textsf{C.62}}$ Seien a, b, c, d vier verschiedene natürliche Zahlen. Ausgehend von (a, b, c, d) darf man ein Tupel (x, y, u, v) durch $(x - y, y - u, u - v, v - x)$ ersetzen. Man beweise, dass dabei wenigstens eine der vier Zahlen beliebig groß wird.

C.62 Betrachte das Abstandsquadrat $x^2+y^2+u^2+v^2$. Nach einem Schritt gilt: $(x-y)^2+(y-u)^2+(u-v)^2+(v-x)^2 = 2(x^2+y^2+u^2+v^2)-2(xy+yu+uv+vx)$. Beachtet man, dass nach dem ersten Schritt $x+y+u+v=0$ bzw. quadriert $0=(x+u)^2+(y+v)^2+2(xy+uv+xv+xy)$ gilt und addiert dies zur ersten Gleichung, so folgt: $(x-y)^2+(y-u)^2+(u-v)^2+(v-x)^2 = 2(x^2+y^2+u^2+v^2)+(x+u)^2+(y+v)^2 \geq 2(x^2+y^2+u^2+v^2)$. Daraus folgt, dass das Abstandsquadrat beliebig groß wird, damit auch wenigstens eine der Komponenten.