C.1 Vom Zählen

Zählen ist die einfachste Sache der Welt, mag man zumindest denken, und was gibt es dazu viel zu sagen? Nun, Zählen allein ist wirklich keine große Kunst, wohl aber ist es oft hilfreich, gewisse Dinge *richtig, systematisch* und manchmal auch *mehrfach* zu zählen.

C.1.1 Permutationen, Variationen, Kombinationen

Hat man beispielsweise eine endliche Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ mit n Elementen gegeben, so kann man nach der Anzahl der Möglichkeiten fragen, nach denen man diese Elemente *anordnen* kann. Hierzu hat man für das erste Element n Möglichkeiten, für das zweite noch $n-1$ usw., bis für das letzte nur noch eine Möglichkeit übrigbleibt. Die Anzahl $P(n)$ der *Permutationen* dieser n Elemente ist also

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \equiv n! \quad (\text{lies: } n \textit{ Fakultät}). \tag{C.1}$$

Beispiel 1: Die Anzahl der möglichen Reihenfolgen, fünf Videofilme nacheinander zu sehen, ist $P(5) = 5! = 120$.

Will man k, nicht notwendig verschiedene Elemente dieser Menge *auswählen und in einer Reihe aufschreiben* (also mit Beachtung der Reihenfolge), so hat man für jede der k Stellen in der Reihe n Möglichkeiten, also ist die gesuchte Anzahl $V(n, k)$ der *Variationen mit Wiederholung*

$$V(n, k) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k\text{-mal}} = n^k. \tag{C.2}$$

Beispiel 2: Die Anzahl der möglichen Bauklötzertürme mit 4 Klötzen ist, wenn genau 3 verschiedene Farben zur Verfügung stehen, $V(3, 4) = 3^4 = 81$.

Beispiel 3: Gesucht ist die Anzahl aller Teilmengen der Menge M. Hierzu entscheidet man sich bei jeder Teilmenge n-mal bei jedem Element, ob man es nimmt oder nicht. Man hat also aus der Zweiermenge {„nehmen“, „nicht nehmen“} n Stück in eine Reihe zu schreiben. Dafür gibt es $V(2, n) = 2^n$ Möglichkeiten. Die Menge aller Teilmengen von M heißt auch die *Potenzmenge* $\mathfrak{P}(M)$. Es gilt also: $|\mathfrak{P}(M)| = 2^n$.

Will man hierbei hingegen eine Wiederholung ausschließen, darf also jedes Element der Menge höchstens einmal benutzt werden, so hat man für das erste Element der Reihe immer noch n Möglichkeiten, für das zweite nur noch $n-1$ usw., und für das k-te nur noch $n-k+1$. Die Anzahl $\overline{V}(n, k)$ dieser *Variationen ohne Wiederholung* ist also

$$\overline{V}(n, k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{C.3}$$

Insbesondere muss dabei $k \leq n$ sein, sonst gibt es gar keine Möglichkeit.

Beispiel 4: Will man also von seinen fünf Lieblingskassetten drei verschiedene hintereinander abspielen, so hat man dafür $\overline{V}(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Wie viele k-elementige Teilmengen hat eine n-elementige Menge M? Um eine k-elementige Menge *auszuwählen*, kann man zunächst k Elemente auf $\overline{V}(n, k)$ Möglichkeiten auswählen und anordnen. Da bei einer Teilmenge von k Elementen die Anordnung nicht von Bedeutung ist, kommt hierbei jede Teilmenge genau $k!$-mal vor. Von allen diesen Möglichkeiten muss man nur eine zählen. Deswegen ist die Anzahl $K(n, k)$ aller *Kombinationen ohne Wiederholung* gleich

$$K(n, k) = \frac{\overline{V}(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \equiv \binom{n}{k}. \tag{C.4}$$

Letztere Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen *Binomialkoeffizienten*; sie treten in vielen Bereichen der Mathematik auf. Für $k > n$ werden sie einfach null gesetzt. Sie sind die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Grundmenge.

Beispiel 5: Es gilt für alle reelle Zahlen a und b und $n \in \mathbb{N}$ der *binomische Satz*:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{-mal}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.\end{aligned}$$

Denn beim Ausmultiplizieren der n Faktoren $(a+b)$ muß man, um einen Summanden der Form $a^{n-k}b^k$ zu erhalten, genau k-mal das b auswählen (und damit $n-k$-mal das a). Dafür hat man genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Beispiel 6: Beim „Lotto am Samstag" werden aus den Zahlen $1, 2, \ldots, 49$ sechs gezogen. Dafür gibt es $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Möglichkeiten.