C.1.2 Systematisch zählen

Hinter diesem Prinzip verbirgt sich der gute Rat, bevor man gewisse Objekte zählt, darüber nachzudenken, wie man sie zählen möchte, da eine geschickte Wahl der Methode die Sache oft extrem vereinfachen kann.

Beispiel 1: Wie viele Paare (x, y) natürlicher Zahlen mit $10x + y \leq 2\,000$ gibt es insgesamt?

Um die in Frage kommenden Paare (x, y) zu zählen, kann man entweder zu jedem möglichen y die erlaubten x zählen oder umgekehrt vorgehen. Da die Aufgabe nicht symmetrisch in x und y ist, richtet sich danach der nachfolgende Arbeitsaufwand. Man findet: Für $1 \leq y \leq 10$ ist $1 \leq x \leq 199$, für $11 \leq y \leq 20$: $1 \leq x \leq 198$ usw., bis für $1\,981 \leq y \leq 1\,990$ nur noch $x = 1$ möglich ist. Das macht $10 \cdot 199 + 10 \cdot 198 + \cdots + 10 \cdot 1 = 10 \cdot \frac{199 \cdot 200}{2} = 199\,000$ Möglichkeiten. Geht man dagegen umgekehrt vor, ergibt sich: für $x = 1$ ist $1 \leq y \leq 1\,990$, für $x = 2$: $1 \leq y \leq 1\,980$ usw., und für $x = 199$ ist $1 \leq y \leq 10$. Man erhält natürlich auch hier $199\,000$, jedoch brauchen hierbei nur einzelne Anzahlen addiert werden, da die Selektion der x einzeln erfolgt.

Treten bei solcherlei Gleichungen die Variablen symmetrisch auf, so kann man zunächst die Symmetrie beseitigen, muss aber bei der Zählung aller Möglichkeiten dieses am Schluss berücksichtigen.

Beispiel 2: Wie viele Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}$ hat die Ungleichung $15 < x^2 + y^2 < 40$?

Hier treten x und y symmetrisch auf. Man kann also zunächst $x^2 \leq y^2$ annehmen. Unter 40 gibt es nur die Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16, 25 und 36. Alle möglichen Paare (x^2, y^2) sind demnach $(0, 16)$; $(0, 25)$; $(0, 36)$; $(1, 16)$; $(1, 25)$; $(1, 36)$; $(4, 16)$; $(4, 25)$; $(9, 9)$; $(9, 16)$; $(9, 25)$ und $(16, 16)$. Beim endgültigen Zählen muss man jetzt beachten, dass es für Paare mit $x^2 = 0$ für y zwei Möglichkeiten gibt, nämlich $\pm\sqrt{y^2}$. Außerdem kann man $x = 0$ und y jeweils noch vertauschen (d. h. die obige Einschränkung $x^2 \leq y^2$ wieder rückgängig machen), was zusammen vier Möglichkeiten ergibt. Bei Paaren mit $x^2 = y^2 \neq 0$ gibt es jeweils vier Möglichkeiten $(\pm x, \pm x)$. Für alle anderen Paare kann man sowohl beide Vorzeichen frei wählen als auch die Plätze vertauschen. Das sind dann acht Möglichkeiten. Damit hat man $3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 7 \cdot 8 = 76$ Lösungen.