C.1.3 Zweimal oder anders zählen

Oft kann man die zu zählenden Objekte selbst nur schwer handhaben. Aber man kann in einigen Fällen leicht zeigen, dass die Anzahl dieser Objekte genau so groß ist, wie die Mächtigkeit einer anderen Menge, die vielleicht leichter zu zählen ist.

Beispiel 1: Seien n Punkte auf einem Kreis gegeben. Wenn man alle Verbindungsstrecken dieser Punkte zeichnet und keine drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen, wie viele Schnittpunkte im Inneren des Kreises gibt es dann?

Die Punkte selbst zu zählen ist kaum möglich. Was man aber kennt, sind die Punkte auf dem Rand. Ein innerer Schnittpunkt entsteht genau durch zwei Strecken mit verschiedenen Endpunkten, die sich kreuzen. Davon wiederum gibt es genau so viele, wie es vier verschiedene Punkte auf dem Kreis gibt. Es gibt also genau $\binom{n}{4}$ Schnittpunkte.

Beispiel 2: Man zeige: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}$.

Hierzu zählt man die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge zweimal. Zunächst auf die herkömmliche Art und Weise, was bekanntlich $\binom{n}{k}$ ergibt. Als zweites stellt man sich die n Elemente in einer Reihe von 1 bis n vor, wählt zunächst das erste Element m und dann die restlichen $k-1$ Elemente aus den $n-m$ größeren Elementen $m+1, \ldots, n$. Für $m = 1, 2, \ldots, (n-k+1)$ ergibt dies die rechte Seite der Gleichung. Daher gilt oben Gleichheit.

Beispiel 3: Wir zählen die Anzahl der Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen aus $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$ mit $z > \max(x, y)$ auf zwei verschiedene Arten:

1. Für ein gegebenes $z = k+1$ hat man k^2 mögliche Paare (x, y). Zusammen sind das $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

2. Man wählt einfach zwei verschiedene Zahlen a und b aus der Menge und setzt $x = y = \min(a, b)$ und $z = \max(a, b)$. Das geht auf $\binom{n+1}{2}$ verschiedene Möglichkeiten. Oder man wählt drei verschiedene Zahlen und kann die beiden kleineren noch auf zwei Arten x und y zuordnen. Dazu hat man also $2 \cdot \binom{n+1}{3}$ Möglichkeiten.

Dies liefert die wichtige Summenformel:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 2 \cdot \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{C.5}$$