### C.2.1 Divisionsreste

Bekanntlich kann man natürliche Zahlen $m$ und $n$ durcheinander mit Rest dividieren.

$$m = p \cdot n + r,$$

wobei $0 \leq r < n$ gilt. Man hat also genau $n$ verschiedene Reste bei einer solchen Division. Lassen zwei Zahlen $a$ und $b > a$ bei Division durch $n$ nun denselben Rest $r$, ist also $a = pn + r$ und $b = qn + r$, so ist ihre Differenz durch $n$ teilbar, denn

$$b - a = (qn + r) - (pn + r) = (q - p)n.$$

Häufig hat man als Schubfächer die Reste bei Division durch eine natürliche Zahl $n$. Indem man dann zeigt, dass zwei Zahlen im selben Schubfach liegen, hat man gezeigt, dass deren Differenz durch $n$ teilbar ist.

**Beispiel 1:** Welches ist die kleinste natürliche Zahl $N$ mit folgender Eigenschaft: Unter $N$ natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Summe durch zwei, deren Differenz durch 7 teilbar ist?

Hier werden als Schubfächer die Reste bei der Division durch 7 gewählt. Damit kann man zeigen, dass $N \leq 5$ ist. Hat man nämlich fünf natürliche Zahlen und ordnet sie dann entsprechend ihrer Reste in die vier Schubfächer „Rest 0“, „Rest 1 oder 6“, „Rest 2 oder 5“ und „Rest 3 oder 4“ ein, so sind nach dem Schubfachprinzip in einem Fach zwei Zahlen. Lassen diese denselben Rest bei Division durch 7, so ist deren Differenz, ansonsten ihre Summe durch 7 teilbar. Dass $N \geq 5$ ist, zeigt ein Beispiel von vier Zahlen ohne die gewünschte Eigenschaft, wie $\{7, 8, 9, 10\}$. Also folgt $N = 5$.

Besonders interessant ist oft auch der Rest bei Division durch eine Zehnerpotenz. Dies entspricht nämlich gerade der Betrachtung der letzten Ziffern einer natürlichen Zahl.

**Beispiel 2:** Man betrachte die Zahlen der Fibonacci-Folge $F_n$, die durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ definiert ist. Man beweise, dass es für jedes $N$ eine Zahl in dieser Folge gibt, die auf $N$ Neunen endet.

Hierzu betrachtet man den Rest bei Division durch $10^N$. Es gibt nur $(10^N)^2$ mögliche Paare von Resten. Da es aber unendlich viele Paare von Fibonacci-Zahlen $(F_n, F_{n+1})$ gibt, gibt es nach Schubfachprinzip zwei solche Paare $(F_k, F_{k+1})$ und $(F_j, F_{j+1})$ $(k < j)$, so dass $F_k$ und $F_j$ sowie $F_{k+1}$ und $F_{j+1}$ gleiche Reste lassen. Nach Rekursion lassen dann aber auch $F_{k-1} = F_{k+1} - F_k$ und $F_{j-1} = F_{j+1} - F_j$ den gleichen Rest bei Division durch $10^N$. So weitermachend erhält man, dass auch die Paare $(F_0, F_1) = (0, 1)$ und $(F_{j-k}, F_{j-k+1})$ gleiche Reste lassen. Dann lässt aber $F_{j-k-1} = F_{j-k+1} - F_{j-k}$ den Rest $1 - 0 = 1$ und dann $F_{j-k-2} = F_{j-k} - F_{j-k-1}$ den Rest $0 - 1 = -1$, was aber dem Rest $999\ldots99$ entspricht, also $N$ Ziffern Neun.