C.3 Das Extremalprinzip

Das Extremalprinzip ist ein heuristisches Prinzip beim Lösen kombinatorischer Aufgaben. Das heißt, dass man es nicht formal definieren kann. Es besagt im Wesentlichen:

> *Betrachte immer extremale Objekte!*

Was das genau heißt, sieht man am besten an Beispielaufgaben. Es geht dabei aber meist um Punkte maximalen Abstands, Strecken kürzester Länge oder aber auch um die kleinste oder größte Zahl in einer Menge. Oft beweist man dann, dass dieses extremale Objekt eine gewünschte Eigenschaft hat, oder manchmal auch, dass es ein solches gar nicht geben kann (in Widerspruchsbeweisen).

Beispiel 1: $n\sqrt{2}$ ist für keine positive ganze Zahl n eine natürliche Zahl. ($\sqrt{2}$ ist irrational.)
Angenommen es gäbe natürliche Zahlen n, für die $n\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ wäre. Dann wäre also die Menge $M = \{n \in \mathbb{N} | n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$ nicht leer und enthielte ein *kleinstes* (Extremalprinzip!) Element† k. Dann wäre aber auch $(\sqrt{2}-1)k \in \mathbb{N}$ und wegen

$$(\sqrt{2}-1)k \cdot \sqrt{2} = 2k - \sqrt{2}k \in \mathbb{N}$$

auch $(\sqrt{2}-1)k \in M$. Wegen $(\sqrt{2}-1)k < k$ ist dies aber ein Widerspruch zur Minimalität von k, also ist die Menge M leer.

Beispiel 2: Eine Menge S von Personen, die alle wenigstens einen Freund in S haben, hat folgende Eigenschaft: Je zwei Personen mit der gleichen Anzahl von Freunden in der Menge haben keinen gemeinsamen Freund in der Menge. Man beweise: Es gibt eine Person mit genau einem Freund!
Man betrachte die Person P mit den meisten (Extremalprinzip!) Freunden in S. Diese Anzahl sei $n \geq 1$. Jeder dieser n Freunde hat nun eine andere Anzahl an Freunden, denn sie haben ja den gemeinsamen Freund P. Es gibt für diese Anzahlen aber nur die n Möglichkeiten $1, 2, 3, \ldots, n$. Also kommt jede davon genau einmal vor, insbesondere auch die 1.

† Hier wird benutzt: Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl. Dies ist im Allgemeinen für rationale oder reelle Zahlen nicht mehr erfüllt, man denke zum Beispiel an die Menge $M = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. Allerdings enthält natürlich jede *endliche* Menge reeller (rationaler, natürlicher) Zahlen eine größte und eine kleinste.